

2014年工(A)第3問

数理
石井K

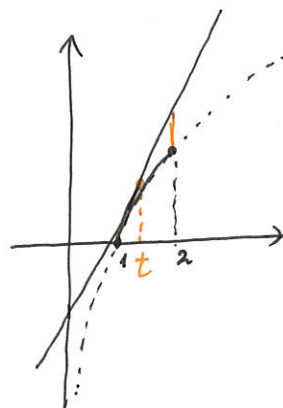
3 曲線 $l: y = \log x$ ($1 \leq x \leq 2$) 上の点 $(t, \log t)$ における l の接線の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{ハ}}}{t} x + \log t - \boxed{\text{ヒ}}$$

であり、この接線と直線 $x = 1$, $x = 2$ および l で囲まれた図形の面積 S は、

$$S = \frac{\boxed{\text{フ}}}{2t} + \log t - \boxed{\text{ヘ}} \log 2$$

である。 $t = \frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}$ のとき、 S は最小値 $1 + \log \frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}}$ をとる。



$y' = \frac{1}{x}$ より、接線は $y = \frac{1}{t}(x-t) + \log t$

$$\therefore y = \frac{1}{t}x + \log t - 1$$

$$S = \int_1^2 \left(\frac{1}{t}x + \log t - 1 - \log x \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2t} + x(\log t - 1) \right]_1^2 - \int_1^2 (x)' \log x dx$$

$$= \frac{2}{t} + 2(\log t - 1) - \frac{1}{2t} - (\log t - 1) - [x \log x]_1^2 + [x]_1^2$$

$$= \frac{3}{2t} + \log t - 1 - 2 \log 2 + 1$$

$$= \frac{3}{2t} + \log t - 2 \log 2$$

$$S'(t) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t^2} \right) + \frac{1}{t}$$

$$= \frac{t - \frac{3}{2}}{t^2}$$

$$\therefore S'(t) = 0 \text{ とするのは } t = \frac{3}{2} \text{ のとき}$$

t	1	...	$\frac{3}{2}$...	2
$S'(t)$		-	0	+	
$S(t)$		↘		↗	

$$S\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \log \frac{3}{2} - 2 \log 2$$

$$= 1 + \log \frac{3}{8}$$