

2012年 第2問

2 区間 $0 \leq x \leq \pi$ で連続な関数 $f(x)$ に対して, 定積分

$$I = \int_0^{\pi} \{t \sin x - f(x)\}^2 dx \quad (t \text{ は実数})$$

を考える. 定数 c_1, c_2, c_3 を

$$c_1 = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx, \quad c_2 = \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx, \quad c_3 = \int_0^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$$

と定めるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) I を, t および c_1, c_2, c_3 を用いて表せ.

(2) c_1 の値を求めよ.

以下では, I を最小にする t の値を t_0 とし, その最小値を I_0 とする.

(3) t_0 を c_2 を用いて表せ. また, I_0 を c_2, c_3 を用いて表せ.

(4) 次の定積分 A, B の値を求めよ.

$$A = \int_0^{\pi} x \sin x dx, \quad B = \int_0^{\pi} x \cos x dx$$

(5) $f(x) = x(\pi - x)$ のとき, c_2, c_3 および I_0 の値をそれぞれ求めよ.