

2010年医学部第4問

4 原点を  $O$  とする座標平面上の動点  $P$  の位置ベクトル  $\vec{OP} = (x, y)$  が、時刻  $t$  の関数として、 $x = e^{-2t} \cos 2\pi t$ ,  $y = e^{-2t} \sin 2\pi t$  で表されている。

(1) 点  $P$  の速度ベクトル  $\vec{v} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$  の大きさは、 $|\vec{v}| = \square \sqrt{\square + \pi^2} e^{-2t}$  である。

(2)  $\vec{OP}$  と  $\vec{v}$  のなす角を  $\alpha$  とするとき、 $\cos \alpha = \frac{\square}{\sqrt{\square + \pi^2}}$  であり、これは時刻  $t$  によらない一定値である。

(3)  $n$  を自然数として、 $t = n - 1$  から  $t = n$  までの間に点  $P$  が動く道のり  $S_n$  は、

$$S_n = \sqrt{\square + \pi^2} (e^{\square} - \square) e^{-2n}$$

である。また、 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sqrt{\square + \pi^2}$  である。

(4)  $t = 0$  から  $t = \frac{1}{4}$  までの間に点  $P$  がえがく曲線と、 $x$  軸、 $y$  軸とで囲まれる図形の面積  $I$  は、 $I = \int_a^b y dx = \int_{\frac{1}{4}}^0 y \frac{dx}{dt} dt$  で求められる。このとき  $a = \square$ ,  $b = \square$  で、 $I = \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-4t} \{ \sin \square * \pi t + \pi (1 - \cos \square * \pi t) \} dt$  である。