

2010年 初等教育 第2問

2 次の問いに答えよ。

- (1) 恒等式  $\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} = x^3+y^3+z^3-3xyz$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$  のとき,  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$  が成り立つことを示せ。また, 等号が成り立つのは  $a=b=c$  のときであることを示せ。
- (3) 一辺の長さがそれぞれ  $a, b, c$  の三角形の面積は  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  で与えられることが知られている。ただし,  $s = \frac{a+b+c}{2}$  とする。三辺の長さの和が  $2s$  ( $s > 0$ ) であるような三角形の面積は  $\frac{s^2}{3\sqrt{3}}$  以下であることを示せ。また, 面積が  $\frac{s^2}{3\sqrt{3}}$  となるのは, 三角形が正三角形のときであることを示せ。