福岡教育大学

2010年 初等教育 第2問

2 次の問いに答えよ．

(1) 恒等式 $\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=x^3+y^3+z^3-3xyz$ が成り立つことを示せ．

(2) $a \geqq 0$，$b \geqq 0$，$c \geqq 0$ のとき，$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのは $a=b=c$ のときであることを示せ．

(3) 一辺の長さがそれぞれ a，b，c の三角形の面積は $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ で与えられることが知られている．ただし，$s=\frac{a+b+c}{2}$ とする．三辺の長さの和が $2s$ $(s>0)$ であるような三角形の面積は $\frac{s^2}{3\sqrt{3}}$ 以下であることを示せ．また，面積が $\frac{s^2}{3\sqrt{3}}$ となるのは，三角形が正三角形のときであることを示せ．