2014年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ aを正の定数とし，曲線 $y=\dfrac{\log x}{a}$ をCとする．次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とし，eは自然対数の底とする．

(1) 点 $\left(0,\ 1-\dfrac{1}{a}\right)$ から曲線Cに引いた接線の方程式をaを用いて表せ．

(2) (1)で求めた接線と曲線Cとx軸によって囲まれた部分のうち第1象限の部分の面積をaを用いて表せ．

(3) 曲線Cが曲線 $y=\dfrac{x^2}{2e}$ と共有点をもち，その点における2つの曲線の接線が一致しているとき，曲線Cと曲線 $y=\dfrac{x^2}{2e}$ とx軸によって囲まれた部分の面積を求めよ．

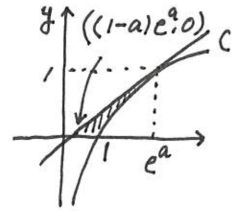
(1) 接点を $\left(t,\ \dfrac{\log t}{a}\right)$ とおくと，$y'=\dfrac{1}{ax}$ より接線は $y=\dfrac{1}{at}(x-t)+\dfrac{\log t}{a}$

これが $\left(0,1-\dfrac{1}{a}\right)$ を通るので，$1-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{1}{a}+\dfrac{\log t}{a}$

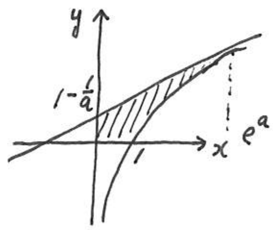
$\therefore\ \log t=a \iff t=e^a$　　$\therefore$ 接線は $\underline{y=\dfrac{x}{ae^a}+1-\dfrac{1}{a}}$ //

(2) 接線とx軸との交点は $0=\dfrac{x}{ae^a}+1-\dfrac{1}{a}$ より，$x=(1-a)e^a$

$\therefore$ (i) $0<a\leqq 1$ のとき



$$S=\frac{1}{2}\cdot\{e^a-(1-a)e^a\}\cdot 1-\int_1^{e^a}\frac{\log x}{a}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\cdot ae^a-\frac{1}{a}\cdot\Big[x\log x\Big]_1^{e^a}+\frac{1}{a}\Big[x\Big]_1^{e^a}$$
$$=\frac{1}{2}ae^a-e^a+\frac{e^a-1}{a}$$



(ii) $a>1$ のとき

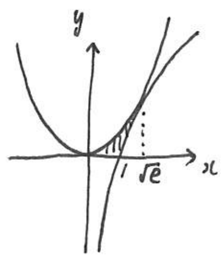
$$S=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{a}\right)\cdot e^a-\int_1^{e^a}\frac{\log x}{a}\,dx$$
$$=\frac{e^a-2}{2a}$$

(i), (ii)より

$$S=\begin{cases}\dfrac{1}{2}ae^a-e^a+\dfrac{e^a-1}{a} & (0<a\leqq 1)\\[2mm] \dfrac{e^a-2}{2a} & (a>1)\end{cases}$$ //

(3) $y'=\dfrac{x}{e}$ より，共有点を $\left(t,\dfrac{t^2}{2e}\right)$ とおくと，

$\dfrac{\log t}{a}=\dfrac{t^2}{2e}$ かつ $\dfrac{t}{e}=\dfrac{1}{at}$ $\iff$ $t=\sqrt{e}$，$a=1$



$$\therefore\ S=\int_0^{\sqrt{e}}\frac{x^2}{2e}\,dx-\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{a}\,dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{6e}\right]_0^{\sqrt{e}}+\frac{\sqrt{e}}{2}-1$$
$$=\underline{\frac{2\sqrt{e}}{3}-1}$$ //