福岡教育大学

2014年 第2問　　1枚目／2枚　　数理 石井K

2 平面上に△OABと点Pがあり，実数 k, m, n に対して

$$k\overrightarrow{PO}+m\overrightarrow{PA}+n\overrightarrow{PB}=\vec{0}$$

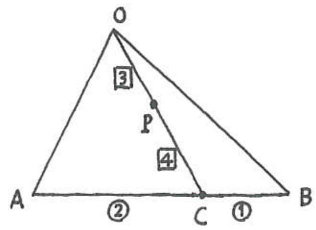
が成り立つとする．次の問いに答えよ．

(1) $k=4$, $m=1$, $n=2$ のとき，△POA，△POB，△PABの面積比を最も簡単な整数の比で表せ．

(2) k を0以上の定数とする．点Pが $m\geqq 0$, $n\geqq 0$, $m+n=3$ を満たしながら動くとき，点Pの軌跡は線分になることを示せ．

(3) 点Pが $k\geqq 1$, $m\geqq 0$, $n\geqq 0$, $m+n=3$ を満たしながら動くとき，点Pの存在する領域 D を図示せよ．また，領域 D の面積は△OABの面積の何倍になるかを求めよ．

(1) $4(-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})=\vec{0}$



$\therefore\ \overrightarrow{OP}=\frac{1}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{7}\overrightarrow{OB}$

$=\frac{3}{7}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)$

∴ 線分ABを2:1に内分する点をCとすると，

点Pは線分OCを3:4に内分する点となる．

$\therefore\ \triangle POA=\triangle OAB\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{7}=\triangle OAB\times\frac{2}{7}$

$\triangle POB=\triangle OAB\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}=\triangle OAB\times\frac{1}{7}$

$\triangle PAB=\triangle OAB\times\frac{4}{7}$

$\therefore\ \underline{\triangle POA:\triangle POB:\triangle PAB=2:1:4}$ //

(2) $k(-\overrightarrow{OP})+m(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+n(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})=\vec{0}$

$\therefore\ (k+m+n)\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$

ここで，$k+m+n=k+3>0$ で両辺を割ると，

k：定数，m, n：変数 であることに注意しよう！

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{k+3}\cdot(m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB})$

$=\frac{3}{k+3}\cdot\left(\frac{m}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{n}{3}\overrightarrow{OB}\right)$

$\therefore\ \overrightarrow{OA'}=\frac{3}{k+3}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}=\frac{3}{k+3}\overrightarrow{OB}$, $m'=\frac{m}{3}$, $n'=\frac{n}{3}$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=m'\overrightarrow{OA'}+n'\overrightarrow{OB'}$ $(m'\geqq 0,\ n'\geqq 0,\ m'+n'=1)$

2枚目へつづく

0001821548718999

福岡教育大学

2014年第2問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 平面上に△OABと点Pがあり，実数 k，m，n に対して

$$k\overrightarrow{\mathrm{PO}}+m\overrightarrow{\mathrm{PA}}+n\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{0}$$

が成り立つとする．次の問いに答えよ．

(1) $k=4$，$m=1$，$n=2$ のとき，△POA，△POB，△PABの面積比を最も簡単な整数の比で表せ．

(2) k を0以上の定数とする．点Pが $m\geqq 0$，$n\geqq 0$，$m+n=3$ を満たしながら動くとき，点Pの軌跡は線分になることを示せ．

(3) 点Pが $k\geqq 1$，$m\geqq 0$，$n\geqq 0$，$m+n=3$ を満たしながら動くとき，点Pの存在する領域 D を図示せよ．また，領域 D の面積は△OABの面積の何倍になるかを求めよ．

(2)のつづき

よって，A′は線分OAを $3:k$ に内分する点，

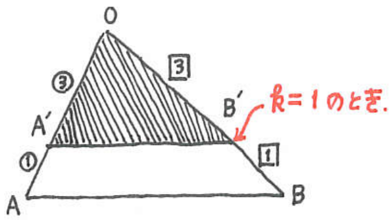
B′は線分OBを $3:k$ に内分する点，であり，

点Pは線分A′B′上を動く．すなわち点Pの軌跡は線分A′B′となる ■

(3) (2)より $k=1$ の場合を考えると，Dは右図の斜線部分となる．

ただし，境界線は含むが点Oは含まない

$k=\infty$ のときであるから．



$\triangle OAB \backsim \triangle OA'B'$ で相似比は $4:3$ であるから

面積比は，$4^2:3^2$

∴ Dの面積は△OABの $\dfrac{9}{16}$ 倍 //