0001821728718999

福岡教育大学

2014年 第4問

$\boxed{4}$ a を正の定数とする．関数 $f(x)$ は

$$f(x) = 2\cos x - a\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin x\,dt$$

を満たしているとする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．
(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}$ を満たす定数 a の値を求めよ．
(3) a が (2) で求めた値のとき，次の (i), (ii) に答えよ．

(i) $0 \leqq x \leqq \pi$ における関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．
(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi} |f(x)|\,dx$ の値を求めよ．

数理 石井K

(1) $T = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ とおくと．

$f(x) = 2\cos x - aT\sin x$

$\therefore\ T = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t - aT\sin t\,dt$

$= \Big[2\sin t + aT\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2 - aT$ 　これより．$(a+1)T = 2$

$\therefore\ T = \dfrac{2}{a+1}$

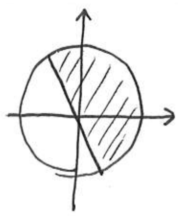
$\therefore\ \underline{f(x) = 2\cos x - \dfrac{2a}{a+1}\sin x}$ //

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx = \int_0^{\pi} \sin 2x - \frac{2a}{a+1}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$

$= \Big[-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{a}{a+1}x + \frac{a}{a+1}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\pi}$

$= -\frac{1}{2} - \frac{a}{a+1}\pi + \frac{1}{2}$

$= -\frac{a}{a+1}\pi$



$\therefore\ -\dfrac{a}{a+1}\pi = -\dfrac{\pi}{2}$ より．$\underline{a = 1}$ //

(3) (i) (2) のとき．$f(x) = 2\cos x - \sin x = -\sqrt{5}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \cos x\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)$

$= -\sqrt{5}\sin(x+\alpha)$ 　$\begin{pmatrix} \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$\therefore\ f(x)$ の $\begin{cases} \text{最大値は } 2, \\ \text{最小値は } -\sqrt{5} \end{cases}$ //

(ii) (i) の α を用いると $f(x) = 0$ となるのは $x = -\alpha$ のとき．

$\therefore\ \displaystyle\int_0^{\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{-\alpha} f(x)\,dx + \int_{-\alpha}^{\pi} -f(x)\,dx$

$= \Big[2\sin x + \cos x\Big]_0^{-\alpha} - \Big[2\sin x + \cos x\Big]_{-\alpha}^{\pi}$

$= 2\sin(-\alpha) + \cos(-\alpha) - 1 + 1 + 2\sin(-\alpha) + \cos(-\alpha)$

$= -4\sin\alpha + 2\cos\alpha$

$= \dfrac{8}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$= \underline{2\sqrt{5}}$ //