

2015年理系2第2問

2 次の問いに答えよ。

(1) 実数 x について、等式

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = \boxed{\text{ス}}^2 \sin\left(x - \frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}^3}\right)$$

が成り立つ。

(2) $0 \leq x < 2\pi$ を満たす実数 x について、無限等比級数

$$1 + (\sin x - \sqrt{3} \cos x) + (\sin x - \sqrt{3} \cos x)^2 + (\sin x - \sqrt{3} \cos x)^3 + \dots$$

は $\frac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}^6} < x < \frac{\pi}{\boxed{\text{タ}}^2}$, $\frac{\boxed{\text{チ}}^7}{\boxed{\text{ツ}}^6} \pi < x < \frac{\boxed{\text{テ}}^3}{\boxed{\text{ト}}^2} \pi$ で収束し、その和は

$$\frac{1}{1 - \boxed{\text{ナ}}^2 \sin\left(x - \frac{\pi}{\boxed{\text{ニ}}^3}\right)}$$

である。

(2) 公比は、 $\sin x - \sqrt{3} \cos x$ なので、収束するのは、

$$-1 < \sin x - \sqrt{3} \cos x < 1 \iff -1 < 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < 1$$

$$\iff -\frac{1}{2} < \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$$

ここで、 $0 \leq x < 2\pi$ より、 $-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$

$$\therefore -\frac{\pi}{6} < x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5}{6}\pi < x - \frac{\pi}{3} < \frac{7}{6}\pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{7}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

和は、
$$\frac{1}{1 - 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$$

