山形大学

2015年 工学部 第3問

3 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定めるとき，次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数である．

(1) $a_1 = \log 2 - 1$ を示せ．

(2) $b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ を示せ．

(3) $a_n = \log 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ $(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を示せ．

(4) $x \geqq 0$ のとき $\dfrac{1}{1+x} \leqq 1$ であることを用いて，$|a_n| \leqq \dfrac{1}{n+1}$ を示せ．

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ を求めよ．