福井大学

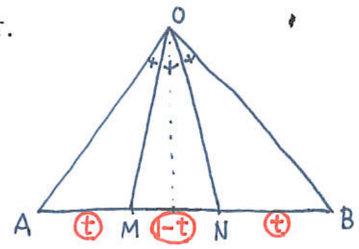
2014年第2問　(他学部のベクトルも参照のこと)

$\boxed{2}$ $\triangle$OABは OA $=$ OB $=1$ を満たす二等辺三角形とする．t を $\frac{1}{2}<t<1$ を満たす定数とし，辺 AB を $t:1$ に内分する点を M，$1:t$ に内分する点を N としたとき，$\angle$AOB $=3\angle$AOM が成り立つとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{ON}=\dfrac{1-t}{t}$ であることを証明せよ．

(2) $x=\cos\angle\mathrm{AOB}$，$y=\cos\angle\mathrm{AOM}$ とするとき，x，y を t を用いて表せ．

(3) $x=-y^2$ が成り立つときの，t の値と辺 AB の長さを求めよ．



(1) AM : MB = t : 1 , AN : NB = 1 : t より

AM : MN : NB = t : 1-t : t

$\triangle$OAN において．OM は $\angle$AON の二等分線 より．

OA : ON = AM : MN

$\therefore$ 1 : ON = t : 1-t　　$\therefore$ $\mathrm{ON}=\dfrac{1-t}{t}$ ▨

(2) $\triangle$OAM : $\triangle$OMB = t : 1 より．$\angle$AOM $=\theta$ とおくと．

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1-t}{t}\cdot\sin\theta : \frac{1}{2}\cdot\frac{1-t}{t}\cdot 1\cdot\sin 2\theta = t : 1$$

$$\therefore \sin\theta : 2\sin\theta\cos\theta = t : 1$$

$$\therefore 2ty=1 \qquad \therefore \underline{y=\frac{1}{2t}}\;/\!/$$

3倍角の公式より．$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$$\therefore x=4y^3-3y \qquad \therefore \underline{x=\frac{1-3t^2}{2t^3}}\;/\!/$$

(3) $x=-y^2$ に (2) の結果を代入して．

$$\frac{1-3t^2}{2t^3}=-\frac{1}{4t^2} \iff 6t^2-t-2=0 \quad (\because \tfrac{1}{2}<t<1 \text{ より})$$

$$\therefore (2t+1)(3t-2)=0 \qquad \tfrac{1}{2}<t<1 \text{ より．} \underline{t=\frac{2}{3}}\;/\!/$$

余弦定理より．$\mathrm{AB}^2=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot x$

$$=2-2\cdot(-y^2)$$

$$=\frac{25}{8} \qquad \therefore \underline{\mathrm{AB}=\frac{5\sqrt{2}}{4}}\;/\!/$$