0002355634467999

福岡女子大学

2016 年 国際文理（環境科学） 第 5 問

数理 石井K

$\boxed{5}$ a, b を $a<b$ であるような正の定数とするとき，以下の問に答えなさい．

(1) 不定積分

$$\int \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\,\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

を $t=\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$ とおくことにより t の式で求めなさい．

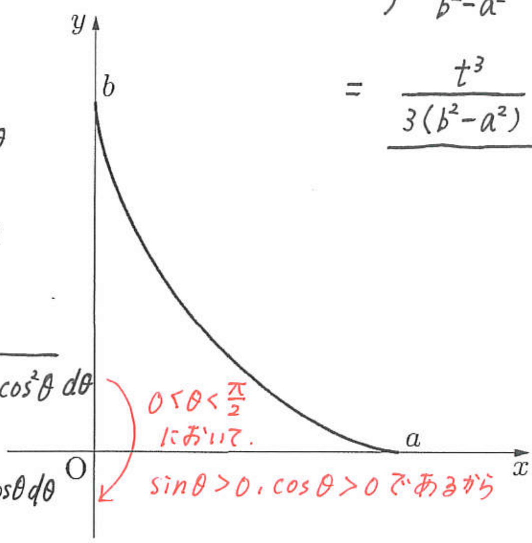
(2) 媒介変数 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ によって表される図のような曲線

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = b\sin^3\theta \end{cases}$$

を考える．この曲線の長さ l が

$$l = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

となることを示しなさい．



(1) $$dt = \frac{a^2\cdot(-2\sin\theta\cos\theta)+b^2\cdot 2\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}\cdot d\theta$$

$$= \frac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}\cdot\sin\theta\cos\theta\cdot d\theta$$

よって．(与式) $$= \int \frac{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}{b^2-a^2}\,dt$$

$$= \int \frac{t^2}{b^2-a^2}\,dt$$

$$= \frac{t^3}{3(b^2-a^2)} + C \quad (C\text{は積分定数})$$ //

(2) $$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

ここで， $$\frac{dx}{d\theta} = -3a\sin\theta\cos^2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 3b\sin^2\theta\cos\theta$$

よって，

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\sin^2\theta\cos^4\theta+9b^2\sin^4\theta\cos^2\theta}\,d\theta$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ において．$\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$ であるから

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

よって (1) を適用して．

$$l = 3\left[\frac{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{3(b^2-a^2)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 3\cdot\frac{b^3-a^3}{3(b^2-a^2)}$$

$$= \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{(b+a)(b-a)}$$

よって， $$l = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$ ▨