0001872817218999

2014年 第4問

数理 石井K

4 行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $A\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ を満たす実数 a，k の値を求めよ．

(1) $A\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+a\\-1+a\end{pmatrix}$

$\therefore k=3+a$ かつ $ka=-1+a$

$a=-1,\ k=2$ //

(2) 行列 $P=\begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 0 \end{pmatrix}$ が $AP=P\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ を満たすとき，実数 p，q，r の値を求めよ．

(2) $AP=\begin{pmatrix}3&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&p\\q&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+q&3p\\-1+q&-p\end{pmatrix}$

$P\begin{pmatrix}r&1\\0&r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&p\\q&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r&1\\0&r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r&1+pr\\qr&q\end{pmatrix}$

$\therefore 3+q=r,\ 3p=1+pr,\ -1+q=qr$

$-p=q$

$\therefore p=1,\ q=-1,\ r=2$ //

(3) 自然数 n に対して，行列 $B=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ の n 個の積 B^n が

$$B^n=\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$$

となることを証明せよ．ただし，α は0と異なる実数とする．

(4) 自然数 n に対して，A の n 個の積 A^n を求めよ．

(5) 自然数 n に対して，実数 x_n，y_n を $A^n=x_nA+y_nE$ を満たすように定めるとき，x_n，y_n を n を用いて表せ．ただし，E は2次の単位行列とする．

(3) 数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき，$B^1=\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}$ となり成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，$B^k=\begin{pmatrix}\alpha^k & k\cdot\alpha^{k-1}\\0&\alpha^k\end{pmatrix}$

$\therefore B^{k+1}=B\cdot B^k=\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^k&k\cdot\alpha^{k-1}\\0&\alpha^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^{k+1}&(k+1)\cdot\alpha^k\\0&\alpha^{k+1}\end{pmatrix}$ となり $n=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して成り立つ ■

(4) (2) より，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}r&1\\0&r\end{pmatrix}$ （$\because 1-pq=2\neq 0$ より P^{-1} は存在する）

$\therefore \underbrace{(P^{-1}AP)\cdot(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{n\text{コ}}=\begin{pmatrix}r^n&nr^{n-1}\\0&r^n\end{pmatrix}$ ← (3) より

$\therefore P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}2^n&n\cdot2^{n-1}\\0&2^n\end{pmatrix} \Leftrightarrow A^n=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&n\cdot2^{n-1}\\0&2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}(n+2)\cdot2^{n-1}&n\cdot2^{n-1}\\-n\cdot2^{n-1}&-(n-2)\cdot2^{n-1}\end{pmatrix}$ //

(5) (4) より，$x_n=n\cdot2^{n-1}$

このとき，$(n\cdot2^{n-1})A+y_nE=\begin{pmatrix}3n\cdot2^{n-1}&n\cdot2^{n-1}\\-n\cdot2^{n-1}&n\cdot2^{n-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_n&0\\0&y_n\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases}x_n=n\cdot2^{n-1},\\ y_n=-(n-1)\cdot2^n\end{cases}$ //