

2010年 初等教育 第4問

4 空間上に相異なる4点  $O, A, B, C$  があり、線分  $OA, OB, OC$  は互いに直交している。次の問いに答えよ。

(1) 4点  $O, A, B, C$  からの距離が全て等しくなる点がただ一つ存在する。この点を  $G$  とする。線分  $OA$  の中点を  $M$  とする。 $\vec{OA}$  と  $\vec{MG}$  が直交することを用いて、

$$\vec{OA} \cdot \vec{OG} = \frac{1}{2} |\vec{OA}|^2$$

となることを示せ。ただし、 $\vec{OA} \cdot \vec{OG}$  は  $\vec{OA}$  と  $\vec{OG}$  の内積とする。

(2) (1)を用いて、

$$\vec{OG} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

が成り立つことを示せ。

(3)  $O(0, 0, 0), P(1, \sqrt{3}, 0), Q\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), R\left(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  とする。このとき線分  $OP, OQ, OR$  は互いに直交していることを示せ。また、4点  $O, P, Q, R$  を通る球面の半径を求めよ。