0002417452857999

福島大学

2017年 人文A 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えなさい．

(1) i を虚数単位とする．$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とするとき，$\omega^4+2\omega^3-\omega^2$ の値を求めなさい．

(2) 次の不等式を解きなさい．

$$\log_2 x + \log_2(x+1) < 1$$

(3) 座標平面上の3点 A(0, 0)，B(1, 1)，C(3, 1) を通る円の中心の座標と半径を求めなさい．

(4) $f(x)+\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = x^2-x$ を満たす関数 $f(x)$ を求めなさい．

(1) $\omega^3=1$ であるから $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega \neq 1$ であるから，$\omega^2+\omega+1=0$

$$\begin{aligned}\therefore\ \omega^4+2\omega^3-\omega^2 &= \omega^3\cdot\omega+2\omega^3-\omega^2\\ &= \omega-\omega^2+2\\ &= \omega-(-\omega-1)+2\\ &= 2\omega+3\\ &= -1+\sqrt{3}i+3\\ &= \underline{2+\sqrt{3}i}\end{aligned}$$

(2) 真数条件より，$x>0$ …①

$\log_2 x(x+1) < \log_2 2$

$\therefore\ x(x+1)<2$

$\therefore\ x^2+x-2<0$

$(x+2)(x-1)<0$

$\therefore\ -2<x<1$

① とあわせて，$\underline{0<x<1}$

(3) 原点(A)を通ることから

$x^2+y^2+px+qy=0$ とおける．

B，C を通ることから

$$\begin{cases} p+q=-2\\ 3p+q=-10\end{cases}$$

$\therefore\ p=-4,\ q=2$

$\therefore\ (x-2)^2+(y+1)^2=5$

$\therefore$ 中心 $\underline{(2,-1)，半径\sqrt{5}}$

(4) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = a$（定数）とおくと．

$f(x)=x^2-x-a$

$$\begin{aligned}\therefore\ a &= \int_0^1 t^2-t-a\,dt\\ &= \left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-at\right]_0^1\\ &= \frac{1}{3}-\frac{1}{2}-a\\ &= -a-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{12}$

$\therefore\ \underline{f(x)=x^2-x+\dfrac{1}{12}}$