0002124905787999

福島大学

2015年 人文A 第2問

$\boxed{2}$ 次の問いに答えなさい.

(1) 次の等式が成り立つことを示しなさい.

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

(2) $\cos 54^\circ$ の値を求めなさい.

(3) 頂点と重心との距離が r の正五角形の面積を求めなさい.

(1) 加法定理より,

$$\cos(\theta+2\theta) = \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta$$
$$= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - 2\cos\theta(1-\cos^2\theta)$$
$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$\therefore$ $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ が成り立つ ▨

(2) $\theta = 54^\circ$ とおくと, $5\theta = 270^\circ$ より,

$$\sin(5\theta - 3\theta) = -\cos 3\theta$$

すなわち, $\sin 2\theta = -\cos 3\theta$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ と (1) の結果を代入して,

$$2\sin\theta\cos\theta = -4\cos^3\theta + 3\cos\theta$$

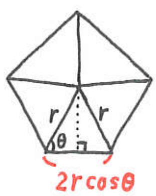
$\therefore$ $\cos\theta(2\sin\theta + 4\cos^2\theta - 3) = 0$

$\therefore$ $\cos\theta(4\sin^2\theta - 2\sin\theta - 1) = 0$

$\cos\theta > 0$, $\sin\theta > 0$ より, $\sin\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より, $\underline{\cos\theta = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$ //

(3) $S = \dfrac{1}{2}r \cdot 2r\cos 54^\circ \cdot \sin 54^\circ \times 5$



(1) より, $\sin 54^\circ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\cos 54^\circ = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

$\therefore$ $S = r^2 \cdot \dfrac{1}{16} \cdot \sqrt{(1+\sqrt{5})^2 \cdot (10-2\sqrt{5})} \times 5$

$$= \frac{5}{16}r^2 \cdot \sqrt{(1+\sqrt{5})^2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot (\sqrt{5}-1)}$$

$$= \underline{\frac{5}{8}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$ //