福島大学

2016年 人文A 第2問

$\boxed{2}$ 関数 $y=x^3-x$ のグラフを C とする．

(1) C 上の点 $(t,\ t^3-t)$ における C の接線の方程式を求めなさい．

(2) C 上の2点 $(t,\ t^3-t)$ および $(s,\ s^3-s)$ における C の接線が一致するのは $t=s$ のときに限ることを示しなさい．

(3) C 上にない点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ から C へ引ける接線の数がちょうど2本となるとき，a，b がみたす条件を求めなさい．

(4) (3)の2本の接線が直交するときの a，b の値を求めなさい．

(1) $y'=3x^2-1$

$\therefore$ 接線は，$y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t$

$\therefore$ $\underline{y=(3t^2-1)x-2t^3}$ //

(2) $(s,\ s^3-s)$ における C の接線は $y=(3s^2-1)x-2s^3$

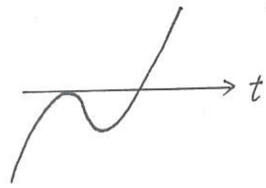
これが(1)と一致するのは．$3t^2-1=3s^2-1$ かつ $-2t^3=-2s^3$ のとき

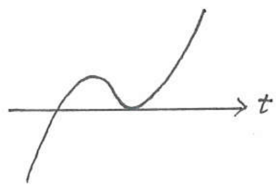
すなわち．$(t+s)(t-s)=0$ かつ $(t-s)(t^2+st+s^2)=0$ のとき

よって，$t=s$ のときに限る ▨

(3) (1)の接線が (a,b) を通るとき

$b=(3t^2-1)a-2t^3 \iff 2t^3-3at^2+a+b=0 \quad \cdots (*)$





$\therefore$ (2)より．t の3次方程式 $(*)$ が異なる2つの実数解をもてばよい

$(*)$ の左辺を $f(t)$ とおくと．$f'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$

$a=0$ のときは $(*)$ は実数解が1つなので $a\neq 0$

このとき．$t=0,\ a$ で極値をもつ

右図より．実数解が2つとなるのは．$f(0)=0$ または $f(a)=0$ のとき

$\therefore$ $a+b=0$ または $-a^3+a+b=0$

$\therefore$ $b=-a$ または $b=a^3-a$

(a,b) は C 上にないことから．$\underline{b=-a \ (\text{ただし } a\neq 0)}$ //

(4) (3)のとき $(*) \iff t^2(2t-3a)=0$ $\therefore$ 接点の x 座標は $0,\ \frac{3}{2}a$

(1)より．$(-1)\cdot\left(\frac{27}{4}a^2-1\right)=-1$ $\therefore$ $a=\pm\frac{2\sqrt{6}}{9}$ $\quad\therefore$ $\underline{(a,b)=\left(\pm\frac{2\sqrt{6}}{9},\ \mp\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)\ (\text{複号同順})}$ //