福島大学

2015年 人文A 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 次の問いに答えなさい.

(1) 3次方程式 $x^3+px+q=0$ の3つの解を α, β, γ とする.

(i) p, q を α, β, γ を用いて表しなさい.

(ii) $\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2$ を p, q を用いて表しなさい.

(2) 次の式を因数分解しなさい.

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$$

(1) 解と係数の関係より, $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p$, $\alpha\beta\gamma=-q$

(i) $\underline{p=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\ q=-\alpha\beta\gamma}$ //

(ii) $\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta^2\gamma-2\alpha^2\beta\gamma-2\alpha\beta\gamma^2$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$=\underline{p^2}$ //

(2) (与式) $=(y-z)x^3-(y^3-z^3)x+yz(y^2-z^2)$

$=(y-z)\{x^3-(y^2+yz+z^2)x+yz(y+z)\}$

ここで, $\alpha=-(y+z)$, $\beta=y$, $\gamma=z$ とすると,

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-y^2-yz-z^2$, $\alpha\beta\gamma=-yz(y+z)$

となるので, $x^3-(y^2+yz+z^2)x+yz(y+z)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$=\{x+(y+z)\}\cdot(x-y)(x-z)$

$\therefore$ (与式) $=(x+y+z)(x-y)(y-z)(x-z)$

$=\underline{-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)}$ //