福島大学

2015年 理工 第4問

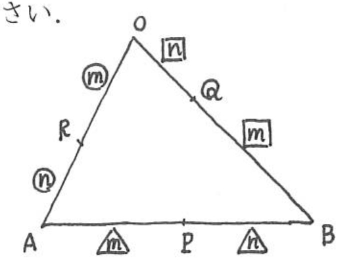
数理 石井K

$\boxed{4}$ 三角形OABの辺OA，AB，BOを共通の比 $m:n$ に内分する点を，それぞれ，R，P，Qとする．$\overrightarrow{OA}$ を $\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}$ を $\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えなさい．

(1) $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$ を，それぞれ，m，n，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい．

(2) $|\overrightarrow{QR}|^2$，$|\overrightarrow{QP}|^2$ の値，および，内積 $\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{QP}$ を，それぞれ，m，n，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい．

(3) 三角形OABの重心Gと三角形PQRの重心Hが一致することを示しなさい．



(1) $\overrightarrow{OP} = \dfrac{n}{m+n}\vec{a} + \dfrac{m}{m+n}\vec{b}$ //

$\overrightarrow{OQ} = \dfrac{n}{m+n}\vec{b}$，$\overrightarrow{OR} = \dfrac{m}{m+n}\vec{a}$ //

(2) $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \dfrac{m}{m+n}\vec{a} - \dfrac{n}{m+n}\vec{b} = \dfrac{1}{m+n}(m\vec{a} - n\vec{b})$

$\therefore |\overrightarrow{QR}|^2 = \dfrac{m^2|\vec{a}|^2 - 2mn\,\vec{a}\cdot\vec{b} + n^2|\vec{b}|^2}{(m+n)^2}$ //

同様に，$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \dfrac{n}{m+n}\vec{a} + \dfrac{m-n}{m+n}\vec{b} = \dfrac{1}{m+n}\{n\vec{a} + (m-n)\vec{b}\}$

$\therefore |\overrightarrow{QP}|^2 = \dfrac{n^2|\vec{a}|^2 + 2n(m-n)\vec{a}\cdot\vec{b} + (m-n)^2|\vec{b}|^2}{(m+n)^2}$ //

$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{QP} = \dfrac{1}{(m+n)^2}(m\vec{a} - n\vec{b})\cdot\{n\vec{a} + (m-n)\vec{b}\}$

$= \dfrac{mn|\vec{a}|^2 + (m^2 - mn - n^2)\vec{a}\cdot\vec{b} - n(m-n)|\vec{b}|^2}{(m+n)^2}$ //

(3) $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \dfrac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$

$\overrightarrow{OH} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR})$

$= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n}{m+n}\vec{a} + \dfrac{m}{m+n}\vec{b} + \dfrac{n}{m+n}\vec{b} + \dfrac{m}{m+n}\vec{a}\right)$

$= \dfrac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$

$\therefore \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$ より，G＝H ▨