# 福島大学

2016年 理工 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $t$ を $t+\dfrac{1}{t}=\sqrt{2}$ を満たす数とし，$A_n=t^n+\dfrac{1}{t^n}$（$n$ は自然数）とするとき，次の問いに答えなさい．

(1) $A_2$，$A_3$，$A_4$ の値を求めなさい．

(2) $n \geqq 2$ のとき，$A_{n+1}$ を $A_n$，$A_{n-1}$ を用いて表しなさい．

(3) $n \geqq 3$ のとき，$A_{n+2}$ を $A_{n-2}$ を用いて表しなさい．

(4) $A_n$ のとりうる値をすべて求めなさい．

(1)
$$A_2 = t^2+\frac{1}{t^2} = \left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2 = 0$$
$$A_3 = t^3+\frac{1}{t^3} = \left(t+\frac{1}{t}\right)^3-3\left(t+\frac{1}{t}\right) = 2\sqrt{2}-3\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$
$$A_4 = t^4+\frac{1}{t^4} = \left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)^2-2 = -2$$

以上より，$\underline{A_2=0,\ A_3=-\sqrt{2},\ A_4=-2}$ //

(2)
$$t^{n+1}+\frac{1}{t^{n+1}} = \left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t^n+\frac{1}{t^n}\right)-\left(t^{n-1}+\frac{1}{t^{n-1}}\right) \quad (n \geqq 2)$$

$\therefore$ $\underline{A_{n+1}=\sqrt{2}A_n-A_{n-1}\quad (n \geqq 2)}$ //

(3) (2)より，
$$\begin{aligned}A_{n+2} &= \sqrt{2}A_{n+1}-A_n\\ &= \sqrt{2}(\sqrt{2}A_n-A_{n-1})-A_n\\ &= A_n-\sqrt{2}A_{n-1}\\ &= \sqrt{2}A_{n-1}-A_{n-2}-\sqrt{2}A_{n-1}\\ &= \underline{-A_{n-2}\quad (n \geqq 3)}\end{aligned}$$ //

(4) $k$ を正の整数として，(3)より，
$$A_{4k}=-A_{4k-4}=A_{4k-8}=\cdots=(-1)^{k-1}A_4$$
$$A_{4k+1}=-A_{4k-3}=A_{4k-7}=\cdots=(-1)^kA_1$$
$$A_{4k+2}=-A_{4k-2}=A_{4k-6}=\cdots=(-1)^kA_2$$
$$A_{4k+3}=-A_{4k-1}=A_{4k-5}=\cdots=(-1)^kA_3$$

$\therefore$ $A_n$ のとりうる値は，

$\underline{\pm\sqrt{2},\ 0,\ \pm 2}$ //