福島大学

2014年 人文A 第1問

$\boxed{1}$ 次の問いに答えなさい．

(1) a，bを正の実数とするとき，不等式

$$a^3+b^3 \geqq a^2b+ab^2$$

が成り立つことを示しなさい．

(2) 2次方程式

$$2x^2-kx+1=0$$

が，$0<x<1$および$1<x<2$の範囲に解を1つずつもつとき，定数kの値の範囲を求めなさい．

(3) 正の実数x，y，zが

$$\frac{yz}{x}=\frac{zx}{4y}=\frac{xy}{9z}$$

を満たすとする．このとき，式

$$\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

の値を求めなさい．

(1) $(\text{左辺})-(\text{右辺}) = a^3+b^3-a^2b-ab^2$

$= (a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)$

$= (a+b)(a^2-2ab+b^2)$

$= (a+b)(a-b)^2$

$\geqq 0$ （$\because a,b>0$より）

$\therefore$ 与えられた不等式は成り立つ ▨

(2) $f(x)=2x^2-kx+1$ とおくと，

$f(0)\cdot f(1) = 1\cdot(3-k)<0 \quad \therefore k>3 \cdots ①$

$f(1)\cdot f(2) = (3-k)(9-2k)<0 \quad \therefore 3<k<\frac{9}{2} \cdots ②$

①，②より，$\underline{3<k<\frac{9}{2}}$ //

(3) $\frac{yz}{x}=\frac{zx}{4y}$ より，$4y^2z=zx^2 \quad \therefore (2y-x)(2y+x)z=0$

$x,y,z>0$より，$2y-x=0 \quad \therefore y=\frac{1}{2}x$

$\frac{yz}{x}=\frac{xy}{9z}$ より，$9yz^2=x^2y \quad \therefore (3z-x)(3z+x)y=0$

$x,y,z>0$より，$3z-x=0 \quad \therefore z=\frac{1}{3}x$

$$\therefore \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}x^2}}$$

$$= \frac{\frac{11}{6}x}{\frac{7}{6}x}$$

$$= \underline{\frac{11}{7}} \;//$$