福島大学

2014年 人文A 第3問

3　円 $C : x^2 + y^2 = 2$ と直線 $\ell : x + y = k$ が異なる2点P, Qで交わっているとする.

(1) k の値の範囲を求めなさい.

(2) P, Qの x 座標をそれぞれ α, β とするとき, $\alpha+\beta$ および $\alpha\beta$ を k を用いて表しなさい.

(3) 線分PQの長さを k を用いて表しなさい.

(4) 円 C 上の点A$(-1,\ -1)$ について

$$2\text{PQ} = \text{AP}$$

となるときの k の値を求めなさい.

(1) 円の中心(0,0)と ℓ とのキョリを d とおくと, 点と直線のキョリ公式より,

$$d = \frac{|0+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

∴ C と ℓ が2点で交わるので, $d < r$ (円の半径)

∴ $\frac{|k|}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}$ より. $|k| < 2$　∴ $\underline{-2 < k < 2}$ //

(2) $y = k - x$ を $x^2+y^2=2$ に代入して,

$x^2 + (k-x)^2 - 2 = 0$

∴ $2x^2 - 2kx + k^2 - 2 = 0$

この解が α, β であるから, 解と係数の関係により,

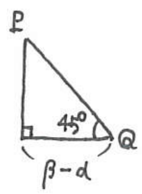
$\alpha+\beta = -\frac{-2k}{2} = k$, $\alpha\beta = \frac{k^2-2}{2}$　∴ $\underline{\alpha+\beta = k,\ \alpha\beta = \frac{1}{2}k^2 - 1}$ //

(3) $\alpha < \beta$ とできる. (2)より.

$(\beta-\alpha)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$

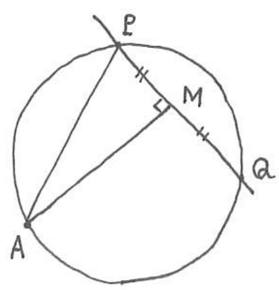
$= k^2 - 4\left(\frac{1}{2}k^2 - 1\right)$

$= -k^2 + 4$



∴ $\beta - \alpha > 0$ より. $\beta - \alpha = \sqrt{4-k^2}$

∴ $\text{PQ} = \sqrt{2}(\beta-\alpha) = \underline{\sqrt{8-2k^2}}$ //



(4) Aから線分PQに下ろした垂線の足をMとする $\text{AM} = \frac{|-1-1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|k+2|}{\sqrt{2}}$

$\text{AM}^2 + \text{PM}^2 = \text{AP}^2$　∴ $\text{AM}^2 + \left(\frac{\text{PQ}}{2}\right)^2 = \text{AP}^2$

∴ $\text{AP}^2 = \frac{(k+2)^2}{2} + \frac{1}{4}\text{PQ}^2$

与式より, $4\text{PQ}^2 = \text{AP}^2$　∴ $\frac{15}{4}(8-2k^2) = \frac{(k+2)^2}{2}$　∴ $4(k+2)(4k-7) = 0$　$-2<k<2$ より. $\underline{k = \frac{7}{4}}$ //