福島大学

2014年 人文B 第4問

数理 石井K

4 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えなさい．

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n{}^3 + 1}{3a_n{}^2}$$

(1) a_2 を求めなさい．

(2) 任意の自然数 n について $a_n > 1$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示しなさい．

(3) 任意の自然数 n について $a_n > a_{n+1}$ が成り立つことを示しなさい．

(1) $a_2 = \dfrac{2a_1{}^3+1}{3a_1{}^2} = \dfrac{2\cdot 2^3+1}{3\cdot 2^2} = \underline{\dfrac{17}{12}}$ //

(2) (i) $n=1$ のとき，

$a_1 = 2 > 1$ より，成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つとすると，

$a_k > 1$ …①

$$\therefore a_{k+1} - 1 = \frac{2a_k{}^3+1}{3a_k{}^2} - 1$$

$$= \frac{2a_k{}^3 - 3a_k{}^2 + 1}{3a_k{}^2}$$

$$= \frac{(a_k-1)^2(2a_k+1)}{3a_k{}^2}$$

> 0 （∵①より）

∴ $a_{k+1} > 1$ となり，$n=k+1$ のとき成り立つ

(i)，(ii) より，任意の自然数 n について，$a_n > 1$ が成り立つ ▨

(3) $a_n - a_{n+1} = a_n - \dfrac{2a_n{}^3+1}{3a_n{}^2}$

$$= \frac{a_n{}^3 - 1}{3a_n{}^2}$$

$$= \frac{(a_n-1)(a_n{}^2+a_n+1)}{3a_n{}^2}$$

> 0 （∵ (2)より，$a_n > 1$ であるから）

∴ 任意の自然数 n について，$a_n > a_{n+1}$ が成り立つ ▨