2015年 国際資源学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 連立不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$3x + y \leqq 8$，$x + 3y \leqq 9$ が表す領域を A とする．次の問いに答えよ．

(1) 直線 $3x + y = 8$ と直線 $x + 3y = 9$ の交点の座標を求めよ．また，領域 A を図示し，その面積を求めよ．

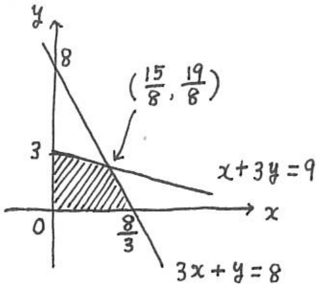
(2) 領域 A において，$\dfrac{3}{4}x + y$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x，y の値を求めよ．

(3) 不等式 $y \geqq \dfrac{8}{3}x^2$ が表す領域と領域 A の共通部分を領域 B とする．領域 B の面積を求めよ．

(4) 不等式 $y \leqq ax$ が表す領域と領域 A の共通部分を領域 C とする．領域 C の面積が領域 B の面積と等しくなる実数 a の値を求めよ．

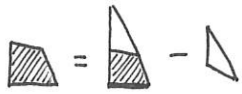
(1) $x + 3(8 - 3x) = 9$

$\therefore\ 8x = 15 \quad \therefore\ x = \dfrac{15}{8}$ このとき $y = \dfrac{19}{8} \quad \therefore\ \underline{\left(\dfrac{15}{8}, \dfrac{19}{8}\right)}$ //



Aは右図の斜線部分（境界線を含む）

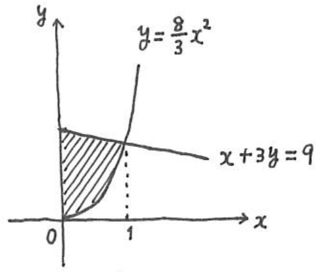
Aの面積は，$\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot \dfrac{15}{8} = \underline{\dfrac{287}{48}}$ //



(2) $\dfrac{3}{4}x + y = k$ とおくと，$y = -\dfrac{3}{4}x + k$

$\underline{k\text{が最大となるのは，}(x, y) = \left(\dfrac{15}{8}, \dfrac{19}{8}\right)\text{のときで，}k = \dfrac{121}{32}}$ //

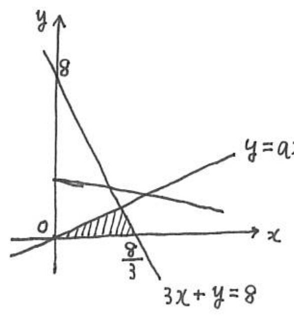
$\underline{k\text{が最小となるのは，}(x, y) = (0, 0)\text{のときで，}k = 0}$ //



(3) $y = \dfrac{8}{3}x^2$ と $x + 3y = 9$ の交点で第1象限にあるものは，$\left(1, \dfrac{8}{3}\right)$

$\therefore$ Bは右図の斜線部分（境界線も含む）

$\therefore$ 面積は，$\displaystyle\int_0^1 -\frac{1}{3}x + 3 - \frac{8}{3}x^2\, dx = \left[-\frac{1}{6}x^2 + 3x - \frac{8}{9}x^3\right]_0^1 = \underline{\frac{35}{18}}$ //



(4) $y = ax$ が $\left(\dfrac{15}{8}, \dfrac{19}{8}\right)$ を通るとき，すなわち $a = \dfrac{19}{15}$ のとき，

Cの面積は，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{19}{8} = \dfrac{19}{6}\left(= \dfrac{57}{18}\right)$ となり，Bの面積より大きい

$\therefore\ 0 < a < \dfrac{19}{15}$ であることがわかる．

このとき，$y = ax$ と，$3x + y = 8$ の交点は，$\left(\dfrac{8}{a+3}, \dfrac{8a}{a+3}\right)$

$\therefore$ Cの面積は，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{8a}{a+3} = \dfrac{35}{18}$

これを解いて，$\underline{a = \dfrac{105}{157}}$ // これは $0 < a < \dfrac{19}{15}$ をみたす．