徳島大学

2015年 理系 第1問

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\tan\dfrac{x}{2} = m$とするとき，等式$\sin x = \dfrac{2m}{1+m^2}$，$\cos x = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}$が成り立つことを示せ．

(2) $-\pi < x < \dfrac{\pi}{2}$のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sin x + \cos x \geqq \tan\frac{x}{2}$$

(1) $\tan^2\dfrac{x}{2} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$ より．$\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{1+m^2}$ $\cdots$ ①

半角の公式 $\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$ に ① を代入すると．

$\cos x = \dfrac{2}{1+m^2} - 1$ $\quad\therefore\ \cos x = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}$

また．tan の倍角の公式より．$\tan x = \dfrac{2m}{1-m^2}$

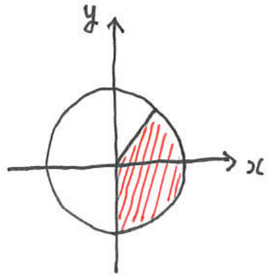
$\therefore\ \sin x = \tan x \cdot \cos x = \dfrac{2m}{1-m^2}\cdot\dfrac{1-m^2}{1+m^2} = \dfrac{2m}{1+m^2}$ ▨

(2) $f(x) = \sin x + \cos x - \tan\dfrac{x}{2}$ $\left(-\pi < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと (1) より．

$$f(x) = \frac{2m}{1+m^2} + \frac{1-m^2}{1+m^2} - m$$

$$= \frac{1+m-m^2-m^3}{1+m^2}$$

$$= \frac{(1+m)^2(1-m)}{1+m^2}$$



ここで，$-\pi < x < \dfrac{\pi}{2}$ より．$-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{4}$ $\quad\therefore\ m < 1$

$\therefore\ f(x) \geqq 0$ となる $\left(\begin{array}{l}(1+m)^2 \geqq 0,\ 1-m > 0,\\ 1+m^2 > 0 \text{ であるから}\end{array}\right)$

等号成立は $m = -1$ のとき．すなわち．$x = -\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\therefore\ \sin x + \cos x \geqq \tan\dfrac{x}{2}$ $\left(-\pi < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ が成り立つ ▨