

2012年 医学部 第2問

2 以下の各問いに答えよ。

(1)  $e$  は自然対数の底とし、 $a$  は正の実数とする。以下の問いに答えよ。(i)  $x > 0$  で定義された関数  $f(x) = a \log x - x$  の増減を調べ、極値を求めよ。(ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a e^{-2x} = 0$  を示せ。(iii) 極限值  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^2 e^{-2t} dt$  を求めよ。(2)  $0 < t < \pi$  とする。曲線  $C: y = \sin \frac{x}{2}$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 上の点  $P\left(t, \sin \frac{t}{2}\right)$  における  $C$  の接線を  $l_1$ 、点  $P$  と原点を通る直線を  $l_2$  とする。以下の問いに答えよ。(i) 接線  $l_1$  と  $x$  軸との交点の  $x$  座標を  $t$  を用いて表せ。(ii)  $j = 1, 2$  について、直線  $l_j$ 、 $x$  軸および直線  $x = t$  で囲まれた三角形を  $x$  軸のまわりに回転させてできた円錐の体積を  $V_j$  とする。また、曲線  $C$ 、 $x$  軸および直線  $x = t$  で囲まれた図形を  $x$  軸のまわりに回転させてできた回転体の体積を  $V$  とする。 $V_1, V_2$  および  $V$  を  $t$  を用いて表せ。(iii) 極限值  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3}$  を求めよ。ただし、 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$  は利用してよい。