2012年 医学部 第4問

$\boxed{4}$ 自然数を自然数に移す関数 $f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & (n\text{が偶数のとき})\\ n+1 & (n\text{が奇数のとき})\end{cases}$ について，f が m を n に移すことを，$m \overset{f}{\longmapsto} n$ と表す．例えば，

$$2 \overset{f}{\longmapsto} 1, \qquad 3 \overset{f}{\longmapsto} 4 \overset{f}{\longmapsto} 2 \overset{f}{\longmapsto} 1$$

である．2以上の自然数 n を f で繰り返し移すとき，1に移るまでに必要な最小の移動回数を a_n とする．したがって，$a_2=1$，$a_3=3$ である．n を自然数として，以下の問いに答えよ．

(1) a_{2n+1} と a_{2n+2} をそれぞれ a_{n+1} を用いて表せ．

(2) 数列 $\{a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots\}$ を次のように，第 n 群の項数が 2^{n-1} になるように分ける．

$$a_2 \mid a_3,\ a_4 \mid a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8 \mid a_9,\ a_{10},\ a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14},\ a_{15},\ a_{16} \mid \cdots$$

(i) 第 n 群の初項を n を用いて表せ．

(ii) 第 n 群の総和を S_n とする．S_{n+1} を n と S_n を用いて表せ．また，S_n を n を用いて表せ．

(iii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{2^n} a_k$ を n を用いて表せ．