

2018年 医学部 第2問

2 関数 $f(x) = x^3 - 6x$ について、曲線 $y = f(x)$ を C とする。また、 $\sqrt{3}$ より大きい実数 a について $a_1 = a$ とし、 a_n ($n = 1, 2, \dots$) に対して C 上の点 $(a_n, f(a_n))$ における接線と直線 $y = 3x$ との交点の x 座標を a_{n+1} と定めることにより数列 $\{a_n\}$ を定義する。以下の問いに答えよ。

(1) $a_2 \geq 3$ を示せ。

(2) 関数 $g(x) = \frac{2x^2 - 3x - 9}{3x^2 - 9}$ について、曲線 $y = g(x)$ ($x > \sqrt{3}$) のグラフをかけ。また、漸近線を求めよ。

(3) 2 以上のすべての自然数 n に対して、不等式 $0 \leq a_{n+1} - 3 \leq \frac{2}{3}(a_n - 3)$ が成り立つことを示せ。

(4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在することを示せ。