

2018年 医学部 第2問

2 関数  $f(x) = x^3 - 6x$  について、曲線  $y = f(x)$  を  $C$  とする。また、 $\sqrt{3}$  より大きい実数  $a$  について  $a_1 = a$  とし、 $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) に対して  $C$  上の点  $(a_n, f(a_n))$  における接線と直線  $y = 3x$  との交点の  $x$  座標を  $a_{n+1}$  と定めることにより数列  $\{a_n\}$  を定義する。以下の問いに答えよ。

(1)  $a_2 \geq 3$  を示せ。

(2) 関数  $g(x) = \frac{2x^2 - 3x - 9}{3x^2 - 9}$  について、曲線  $y = g(x)$  ( $x > \sqrt{3}$ ) のグラフをかけ。また、漸近線を求めよ。

(3) 2 以上のすべての自然数  $n$  に対して、不等式  $0 \leq a_{n+1} - 3 \leq \frac{2}{3}(a_n - 3)$  が成り立つことを示せ。

(4) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  が存在することを示せ。