

2012年 医学部 第4問

4 自然数を自然数に移す関数 $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ n+1 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$ について、 f が m を n に移すことを、

$m \xrightarrow{f} n$ と表す。例えば、

$$2 \xrightarrow{f} 1, \quad 3 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 1$$

である。2以上の自然数 n を f で繰り返し移すとき、1に移るまでに必要な最小の移動回数を a_n とする。したがって、 $a_2 = 1$ 、 $a_3 = 3$ である。 n を自然数として、以下の問いに答えよ。

- (1) a_{2n+1} と a_{2n+2} をそれぞれ a_{n+1} を用いて表せ。
 (2) 数列 $\{a_2, a_3, a_4, \dots\}$ を次のように、第 n 群の項数が 2^{n-1} になるように分ける。

$$a_2 \mid a_3, a_4 \mid a_5, a_6, a_7, a_8 \mid a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16} \mid \dots$$

- (i) 第 n 群の初項を n を用いて表せ。
 (ii) 第 n 群の総和を S_n とする。 S_{n+1} を n と S_n を用いて表せ。また、 S_n を n を用いて表せ。
 (iii) $\sum_{k=2}^{2^n} a_k$ を n を用いて表せ。