2013年 理学部 第4問

4 次の問いに答えよ．

(1) $x>0$ のとき，$1+2\sin x<x+e^x$ が成り立つことを示せ．

(2) $x \geqq 0$ の範囲にあって，2つの曲線 $y=1+2\sin x$，$y=x+e^x$ と直線 $x=\pi$ とで囲まれる領域を x 軸のまわりに1回転して得られる立体の体積を求めよ．

(1) $f(x)=x+e^x-1-2\sin x$ とおくと

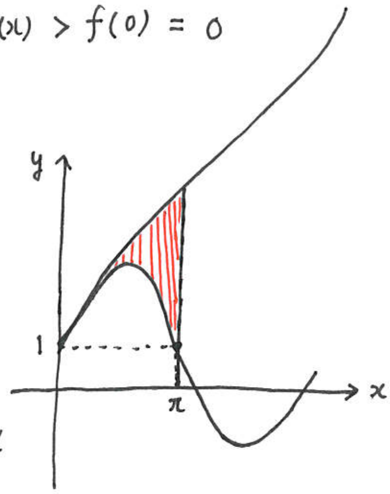
$f'(x)=1+e^x-2\cos x$

ここで，$x>0$ のとき，$e^x>1$ より $f'(x)>2-2\cos x \geqq 0$

$\therefore f'(x)>0$ より $f(x)$ は単調増加であり，$f(x)>f(0)=0$

$\therefore\ x+e^x>1+2\sin x$ ■

(2) (1)よりグラフは右のようになるので



$$V=\pi\int_0^{\pi}(x+e^x)^2-(1+2\sin x)^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}x^2+2xe^x+e^{2x}-1-4\sin x-4\sin^2 x\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}x^2+e^{2x}-1-4\sin x-4\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx+2\pi\int_0^{\pi}x(e^x)'\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}e^{2x}-x+4\cos x-2x+\sin 2x\right]_0^{\pi}+2\pi\left[xe^x\right]_0^{\pi}-2\pi\int_0^{\pi}e^x\,dx$$

$$=\pi\left(\frac{\pi^3}{3}+\frac{1}{2}e^{2\pi}-\pi-4-2\pi-\frac{1}{2}-4\right)+2\pi^2e^{\pi}-2\pi(e^{\pi}-1)$$

$$=\frac{\pi^4}{3}+\frac{\pi}{2}e^{2\pi}-3\pi^2-\frac{17}{2}\pi+2\pi^2e^{\pi}-2\pi e^{\pi}+2\pi$$

$$=\underline{\frac{\pi^4}{3}+\frac{\pi}{2}e^{2\pi}-3\pi^2-\frac{13}{2}\pi+2\pi^2e^{\pi}-2\pi e^{\pi}}\ /\!/$$