0001552367448999

学習院大学

2013年 文学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 平面上に放物線 $C_1 : y = x^2$ と円 $C_2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ がある．

(1) C_1 上の点Pであって，Pにおける C_1 の法線が点 $(1,\ 2)$ を通るようなものをすべて求めよ．ただし，Pにおける C_1 の法線とは，Pを通りPにおける C_1 の接線に直交する直線のことである．

(2) C_1 と C_2 の共有点をすべて求めよ．

$t=0$ のとき法線は $x=0$ で $(1,2)$ を通らないので

(1) $P(t, t^2)$ とおくと．($t \neq 0$ とする)

$y' = 2x$ より．Pにおける C_1 の接線は $y = 2t(x-t) + t^2$

$\therefore$ 法線は．$y = -\dfrac{1}{2t}(x-t) + t^2$

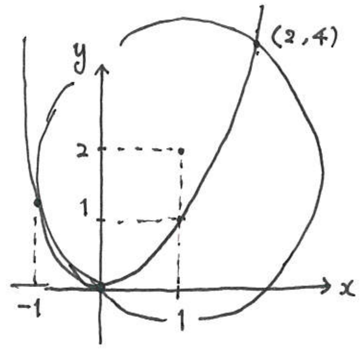
これが $(1, 2)$ を通るので，$2 = -\dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{2} + t^2$

$\therefore\ 2t^3 - 3t - 1 = 0$

$\therefore\ (t+1)(2t^2 - 2t - 1) = 0$ $\quad \therefore\ t = -1,\ \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ P は．$\underline{(-1, 1),\ \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)}$ //

(2) $P(t, t^2)$ とおいて．円の中心 $(1, 2)$ とのキョリが $\sqrt{5}$ となるものを求める．



$(t-1)^2 + (t^2-2)^2 = 5$

$\therefore\ t^4 - 3t^2 - 2t = 0$

$\therefore\ t(t^3 - 3t - 2) = 0$

$\therefore\ t(t-2)(t+1)^2 = 0$

$\therefore\ \underline{(0, 0), (2, 4), (-1, 1)}$ //