学習院大学

2014年 経済学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ aを正の実数とし，2つの放物線

$$C_1 : y = \left(2x + \frac{1}{a}\right)^2, \quad C_2 : y = (x-a)^2$$

を考える．

(1) C_1とC_2の交点の座標を求めよ．

(2) C_1とC_2とで囲まれる部分の面積Sを求めよ．

(3) aが正の実数全体を動くとき，Sの最小値を求めよ．

(1) $\left(2x+\frac{1}{a}\right)^2 - (x-a)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{a}+a\right)\left(3x+\frac{1}{a}-a\right) = 0$

$\therefore x = -a-\frac{1}{a}, \ \frac{1}{3}\left(a-\frac{1}{a}\right)$

$\therefore$交点は$\underline{\left(-a-\frac{1}{a}, \ 4a^2+\frac{1}{a^2}+4\right)}$,

$\underline{\left(\frac{1}{3}\left(a-\frac{1}{a}\right), \ \frac{4}{9}a^2+\frac{1}{9a^2}+\frac{4}{9}\right)}$ //

$\alpha = -a-\frac{1}{a}$，$\beta = \frac{1}{3}\left(a-\frac{1}{a}\right)$とおくと，

(2) $S = \left|\int_\alpha^\beta \left(2x+\frac{1}{a}\right)^2 - (x-a)^2 \, dx\right|$

$= \left|3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\, dx\right|$

$= \frac{3}{6}(\beta-\alpha)^3$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}a+\frac{2}{3a}\right)^3$

$= \underline{\frac{4}{27}\left(2a+\frac{1}{a}\right)^3}$ //

(3) $f(a) = 2a+\frac{1}{a}$とおくと．$a>0$より (相加平均) $\geqq$ (相乗平均)

$\therefore 2a+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{a}} = 2\sqrt{2}$

$\therefore S$の最小値は $\frac{4}{27}\cdot(2\sqrt{2})^3 = \underline{\frac{64}{27}\sqrt{2}}$ // このときのaは $2a = \frac{1}{a}$

すなわち．$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$