学習院大学

2014年 法学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ すべての自然数 n に対して，不等式

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}>\sqrt{2n+1}-1$$

が成り立つことを示せ．

(別) 理系なら.
区分求積法にもちこむのが速い

数学的帰納法により示す.

(i) $n=1$ のとき

(左辺) $=1$, (右辺) $=\sqrt{3}-1$

$1<\sqrt{3}<2$ より, $0<\sqrt{3}-1<1$ であるから (左辺) > (右辺) となる よって $n=1$ のとき成り立つ

(ii) $n=k$ のとき 成り立つと仮定すると,

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k-1}}>\sqrt{2k+1}-1 \quad \cdots (*)$$ が成り立つ

(*) の両辺に, $\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$ を加えて,

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k-1}}+\frac{1}{\sqrt{2k+1}}>\sqrt{2k+1}+\frac{1}{\sqrt{2k+1}}-1 \quad \cdots (**)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2k+1}+\frac{1}{\sqrt{2k+1}}-\sqrt{2k+3} &= \sqrt{2k+1}-\sqrt{2k+3}+\frac{1}{\sqrt{2k+1}} \\
&= \frac{(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k+3})(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+3})}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+3}}+\frac{1}{\sqrt{2k+1}} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+3}}+\frac{1}{\sqrt{2k+1}} \\
&> -\frac{2}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+1}}+\frac{1}{\sqrt{2k+1}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\therefore\ \sqrt{2k+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}>\sqrt{2k+3}$ (**) より $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}>\sqrt{2k+3}-1$

$\therefore$ $n=k+1$ のとき成り立つ

(i), (ii) より. すべての n について. 不等式は成り立つ ▨