0002443906557999

学習院大学

2016年 国際社会科学部 第4問

石井

$\boxed{4}$ tを正の実数とし，曲線$C : y = x^3 - \frac{4}{3}x$上の点P $\left(t,\ t^3 - \frac{4}{3}t\right)$におけるCの接線をLとする．また，CとLの交点のうちP以外のものをQとする．

(1) QにおけるCの接線がLと直交するようなtの値を求めよ．

(2) tが(1)で求めた値をとるとき，CとLとで囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $y' = 3x^2 - \frac{4}{3}$

$\therefore$ L : $y = \left(3t^2 - \frac{4}{3}\right)(x - t) + t^3 - \frac{4}{3}t$

$\therefore$ $y = \left(3t^2 - \frac{4}{3}\right)x - 2t^3$

Qのx座標をsとすると．

$x^3 - \frac{4}{3}x - \left(3t^2 - \frac{4}{3}\right)x + 2t^3 = 0$ の解は．$x = t$(重解)，s

であるから．解と係数の関係より．$t + t + s = 0$ $\therefore$ $s = -2t$

$\therefore$ QにおけるCの接線の傾きは．$3 \cdot (-2t)^2 - \frac{4}{3} = 12t^2 - \frac{4}{3}$

$\therefore$ $\left(3t^2 - \frac{4}{3}\right) \cdot \left(12t^2 - \frac{4}{3}\right) = -1 \iff \left(6t^2 - \frac{5}{3}\right)^2 = 0$

$t > 0$より．$\underline{t = \frac{\sqrt{10}}{6}}$ //

(2) $S = \int_{-2t}^{t} x^3 - \frac{4}{3}x - \left(3t^2 - \frac{4}{3}\right)x + 2t^3\, dx$

$= \int_{-2t}^{t} x^3 - 3t^2x + 2t^3\, dx$ ← $\frac{1}{12}$の公式を使ってもよい

$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}t^2x^2 + 2t^3x\right]_{-2t}^{t}$

$= \frac{27}{4}t^4$

(1)のtの値を代入

$= \frac{25}{48}$ //