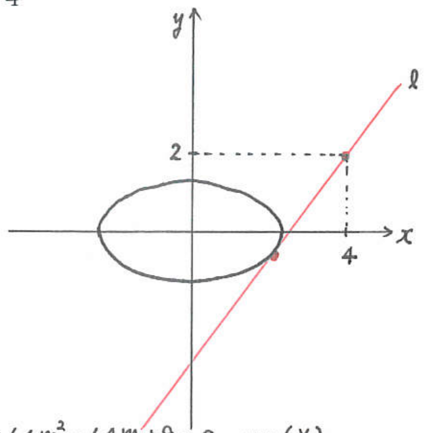
0002203546977999

学習院大学

2016年 理学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 平面上の点P$(s,\ t)$が楕円C：$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$上を動くとき，$\dfrac{t-2}{s-4}$の最大値を求めよ．また，最大値を与える$s$，$t$を求めよ．



$\dfrac{t-2}{s-4}$ は C上の点P(s,t)と点$(4,2)$を通る直線をlとすると，

lの傾きである．この傾きをmとおくと

$l:\ y=m(x-4)+2$ と表せる．

mが最大となるのは右図のようにCとlが接するときである．

$$\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}\{m(x-4)+2\}^2=1 \iff (4m^2+1)x^2+16m(1-2m)x+64m^2-64m+8=0 \quad \cdots (*)$$

この判別式をDとおくと

$$\frac{D}{4}=\{8m(1-2m)\}^2-(4m^2+1)(64m^2-64m+8)$$

$$=64m^2(4m^2-4m+1)-8(4m^2+1)(8m^2-8m+1)$$

$$=8\{32m^4-32m^3+8m^2-(32m^4-32m^3+12m^2-8m+1)\}$$

$$=-8(4m^2-8m+1)$$

$D=0$より，$m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ $\underline{\dfrac{t-2}{s-4}\text{ の最大値は } \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$ //

$(*)$に代入して，$4(2+\sqrt{3})x^2-8(2+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})x+8(2+\sqrt{3})^2=0$

$\therefore 4(2+\sqrt{3})\{x^2-2(1+\sqrt{3})x+2(2+\sqrt{3})\}=0$

$\therefore 4(2+\sqrt{3})\{x-(1+\sqrt{3})\}^2=0$

$\therefore x=1+\sqrt{3}$ これをlの式に代入して，$y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ 最大値を与えるs,tは，$\underline{s=1+\sqrt{3},\ t=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}}$ //