0002300819967999

学習院大学

2014年 文学部 第4問

数理 石井K

4 実数tに対して

$$f(t)=\int_0^1(3x^2+tx-2|x^2-tx|)\,dx$$

とおく．tが実数全体を動くとき，$f(t)$の最大値と，最大値を与えるtを求めよ．

$0 \leqq x \leqq 1$ において

$|x^2-tx| = |x(x-t)| = x|x-t|$ となるから

$$|x^2-tx| = \begin{cases} x^2-tx & (x \geqq t \text{ のとき}) \\ -x^2+tx & (x < t \text{ のとき}) \end{cases}$$

(i) $t<0$ のとき.

$$f(t)=\int_0^1 3x^2+tx-2(x^2-tx)\,dx$$

$$=\int_0^1 x^2+3tx\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}tx^2\right]_0^1$$

$$=\frac{3}{2}t+\frac{1}{3}$$

(ii) $t>1$ のとき

$$f(t)=\int_0^1 3x^2+tx+2(x^2-tx)\,dx$$

$$=\int_0^1 5x^2-tx\,dx$$

$$=\left[\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{2}tx^2\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{2}t+\frac{5}{3}$$

(iii) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$f(t)=\int_0^t 3x^2+tx+2(x^2-tx)\,dx$$

$$+\int_t^1 3x^2+tx-2(x^2-tx)\,dx$$

$$=\left[\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{2}tx^2\right]_0^t+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}tx^2\right]_t^1$$

$$=\frac{5}{3}t^3-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{3}+\frac{3}{2}t-\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^3$$

$$=-\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t+\frac{1}{3}$$

$$f'(t)=-2t^2+\frac{3}{2}$$

$$=-2\left(t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$0 \leqq t \leqq 1$ より. $f'(t)=0$ となるのは

$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき.

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}+2}{6}$	$\searrow$	$\frac{7}{6}$

(i)〜(iii) より.

$f(t)$の最大値は $\frac{3\sqrt{3}+2}{6}$ $\left(t=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ のとき}\right)$ //