2014年 理学部 第3問

3 平面上に3点 A$(0,\ a)$，B$(-t,\ t^2-a)$，C$(t,\ t^2-a)$ があり，条件

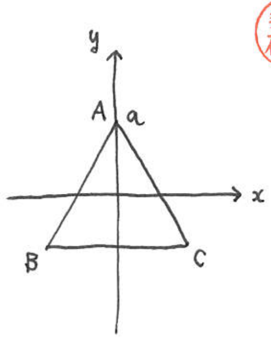
$a>0,\quad 0<t\leqq\sqrt{a},\quad$ △ABCは正三角形

が成り立っているとする．

(1) a を t で表せ．

(2) $0<t\leqq\sqrt{3}$ であることを示せ．

(3) 2つの放物線 $y=x^2-a$，$y=-x^2+a$ で囲まれた部分の面積を S とし，△ABCの面積を T とする．t が (2) の範囲を動くとき，$\dfrac{S}{T}$ の最小値を求めよ．



(1) 直線ABの傾きは $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ より． $\dfrac{a-(t^2-a)}{0-(-t)}=\dfrac{2a-t^2}{t}=\sqrt{3}$

$\therefore\ a=\dfrac{t^2+\sqrt{3}t}{2}$ //

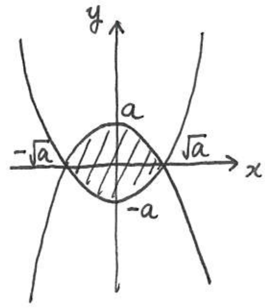
(2) $0<t\leqq\sqrt{a}$ より $t^2\leqq a$ $\therefore$ (1) より $t^2\leqq\dfrac{t^2+\sqrt{3}t}{2}$

$\therefore\ \dfrac{t}{2}\cdot(t-\sqrt{3})\leqq 0$ $\quad t>0$ より $t\leqq\sqrt{3}$ $\quad\therefore\ 0<t\leqq\sqrt{3}$ ▨

(3) $S=2\displaystyle\int_0^{\sqrt{a}}-x^2+a-(x^2-a)\,dx$

$=4\left[-\dfrac{x^3}{3}+ax\right]_0^{\sqrt{a}}$

$=\dfrac{8a\sqrt{a}}{3}$



$BC=2t$ より． $T=\dfrac{1}{2}\cdot 2t\cdot\sqrt{3}t=\sqrt{3}t^2$

$\therefore$ (1) より． $\dfrac{S}{T}=\dfrac{\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{t^2+\sqrt{3}t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}t^2}=\dfrac{2\sqrt{2}(t^2+\sqrt{3}t)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}t^2}$

$\therefore\left(\dfrac{S}{T}\right)^2=\dfrac{8}{27}\cdot\dfrac{(t^2+\sqrt{3}t)^3}{t^4}=\dfrac{8}{27}\cdot\underbrace{\dfrac{(t+\sqrt{3})^3}{t}}_{\text{これを } f(t) \text{ とおく}}$

$f'(t)=\dfrac{3(t+\sqrt{3})^2\cdot t-(t+\sqrt{3})^3}{t^2}=\dfrac{(t+\sqrt{3})^2(2t-\sqrt{3})}{t^2}$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	$\frac{81}{4}$	↗	

$\therefore\ 0<t\leqq\sqrt{3}$ で $f'(t)=0$ となるのは，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

このとき $f(t)$ は最小値 $\dfrac{81}{4}$ をとる

$\dfrac{S}{T}$ の最小値は $\sqrt{6}$ //