0002260909377999

学習院大学

2016年 法学部 第4問　1枚目／2枚

$\boxed{4}$ 放物線 $C: y=4-x^2$ と x 軸とで囲まれた部分を D とし，D の面積を S とする．

(1) S を求めよ．

(2) 点 $(-2,\ 0)$ を通り傾き $\frac{4}{5}$ の直線と C とで囲まれた部分の面積を T とする．T と $\frac{S}{2}$ の大小を判定せよ．

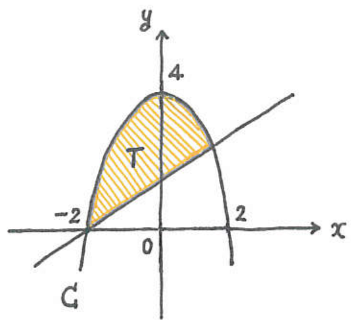
(3) 傾きが $\frac{4}{5}$ であり D の面積を2等分する直線を L とする．L の方程式を求めよ．

(1) $S=\int_{-2}^{2} 4-x^2\,dx$

$=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$

$=8-\frac{8}{3}-\left(-8+\frac{8}{3}\right)$

$=\underline{\frac{32}{3}}$ //



(2) 直線の方程式は $y=\frac{4}{5}(x+2)$　$\therefore y=\frac{4}{5}x+\frac{8}{5}$

∴ 直線と放物線の交点の x 座標を求めると，

$\frac{4}{5}x+\frac{8}{5}-(4-x^2)=0 \iff x^2+\frac{4}{5}x-\frac{12}{5}=0$

$\iff (x+2)\left(x-\frac{6}{5}\right)=0$

$\therefore x=-2,\ \frac{6}{5}$

$\therefore T=\int_{-2}^{\frac{6}{5}} 4-x^2-\left(\frac{4}{5}x+\frac{8}{5}\right)dx$

$=-\int_{-2}^{\frac{6}{5}}(x+2)\left(x-\frac{6}{5}\right)dx$　　$\frac{1}{6}$ 公式を使った

$=\frac{1}{6}\left\{\frac{6}{5}-(-2)\right\}^3$

$=\frac{2048}{375}$

$\therefore T-\frac{S}{2}=\frac{2048}{375}-\frac{16}{3}$

$=\frac{2048}{375}-\frac{2000}{375}$

$=\frac{48}{375}$

>0

よって，$\underline{T>\frac{S}{2}}$ //

2枚目へつづく

学習院大学

2016年 法学部 第4問　2枚目／2枚

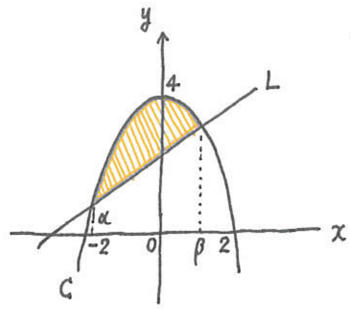
$\boxed{4}$ 放物線 $C: y = 4 - x^2$ と x 軸とで囲まれた部分を D とし，D の面積を S とする．

(1) S を求めよ．

(2) 点 $(-2,\ 0)$ を通り傾き $\frac{4}{5}$ の直線と C とで囲まれた部分の面積を T とする．T と $\frac{S}{2}$ の大小を判定せよ．

(3) 傾きが $\frac{4}{5}$ であり D の面積を 2 等分する直線を L とする．L の方程式を求めよ．

(3) (2)の結果より，Lは(2)の直線より上にある



よって，$L: y = \frac{4}{5}x + k \ (k > \frac{8}{5})$ とおくと

$\frac{4}{5}x + k - (4 - x^2) = 0 \iff x^2 + \frac{4}{5}x + k - 4 = 0$

CとLの交点のx座標を $\alpha, \beta \ (\alpha < \beta)$ とおくと，解と係数の関係より，

$\alpha + \beta = -\frac{4}{5}$，$\alpha\beta = k - 4$ …①

$$\therefore \int_\alpha^\beta 4 - x^2 - \left(\frac{4}{5}x + k\right) dx = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\, dx$$
$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \quad \cdots ②$$

①より，
$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$
$$= \frac{16}{25} - 4(k - 4)$$
$$= -4k + \frac{416}{25}$$

$\therefore \beta - \alpha > 0$ より，$\beta - \alpha = \frac{2}{5}\sqrt{104 - 25k}$

②に代入して，$\frac{1}{6} \cdot \frac{8}{125}(104 - 25k)^{\frac{3}{2}}$

これがSの半分であるから，$\frac{4}{375}(104 - 25k)^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3}$

$$\therefore (104 - 25k)^{\frac{3}{2}} = 500$$
$$(104 - 25k)^3 = 250000$$
$$\therefore 104 - 25k = \sqrt[3]{250000}$$
$$\therefore k = \frac{104}{25} - 2\sqrt[3]{2}$$

$$\therefore L: y = \frac{4}{5}x + \frac{104}{25} - 2\sqrt[3]{2}$$
//