

2016年人間科学学部(文系)第4問

4 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^x |t-2| dt$$

とする。ただし $x \geq 0$ とする。

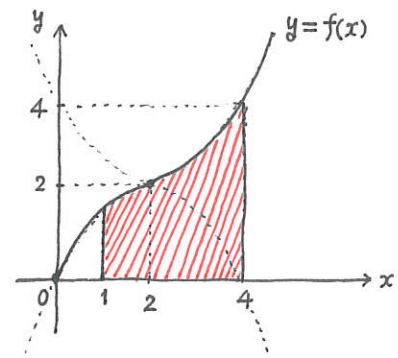
関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸, $x = 1$, $x = 4$ で囲まれる部分の面積は $\frac{\boxed{43}}{\boxed{6}}$ である。

(i) $x > 2$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^2 (2-t) dt + \int_2^x t-2 dt \\ &= \left[2t - \frac{t^2}{2} \right]_0^2 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t \right]_2^x \\ &= 4 - 2 + \frac{x^2}{2} - 2x - (2 - 4) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 \quad \rightarrow = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 2 \end{aligned}$$

(ii) $0 \leq x \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (2-t) dt \\ &= \left[2t - \frac{t^2}{2} \right]_0^x \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 2x \quad \rightarrow = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2 \end{aligned}$$



(i) ~ (ii) より, グラフは右のようになる。

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 -\frac{1}{2}x^2 + 2x dx + \int_2^4 \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 dx \\ &= \left[-\frac{1}{6}x^3 + x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{6}x^3 - x^2 + 4x \right]_2^4 \\ &= -\frac{4}{3} + 4 + \frac{1}{6} - 1 + \frac{32}{3} - 16 + 16 - \frac{4}{3} + 4 - 8 \\ &= \frac{43}{6} \end{aligned}$$