京都大学

2017年 文系 第1問

$\boxed{1}$ 曲線 $y = x^3 - 4x + 1$ を C とする．直線 ℓ は C の接線であり，点 $\mathrm{P}(3,\ 0)$ を通るものとする．また，ℓ の傾きは負であるとする．このとき，C と ℓ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

$y' = 3x^2 - 4$ より接点を $(t,\ t^3-4t+1)$ とおくと，接線は

$y = (3t^2-4)(x-t) + t^3 - 4t + 1 \iff y = (3t^2-4)x - 2t^3 + 1$

と表せる．これが $P(3,0)$ を通ることより，

$$
\begin{aligned}
0 &= -2t^3 + 9t^2 - 11 \\
&= -(t+1)(2t^2 - 11t + 11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2t^2 - 11t + 11 \\
\hline
t+1 & 2t^3 - 9t^2 + 11 \\
 & 2t^3 + 2t^2 \\
\hline
 & -11t^2 + 11 \\
 & -11t^2 - 11t \\
\hline
 & 11t + 11 \\
 & 11t + 11 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore\ t = -1,\ \dfrac{11 \pm \sqrt{33}}{4}$

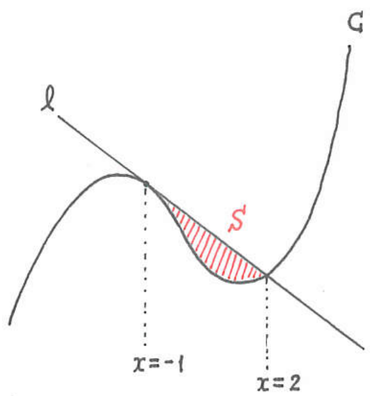
このうち，傾き $3t^2 - 4$ が負であるのは．$t = -1$ （補足参照）

そのときの接線 ℓ は．$y = -x + 3$

C と ℓ のもう1つの共有点の x 座標は．解と係数の関係より，

$-2 + x = 0 \quad \therefore\ x = 2$

よって，右図より，



$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{2} -x + 3 - (x^3 - 4x + 1)\, dx \\
&= -\int_{-1}^{2} (x+1)^2(x-2)\, dx \\
&= \frac{1}{12} \cdot 3^4 \\
&= \underline{\frac{27}{4}} \text{〃}
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{12}$ 公式

（補足）

$t = -1 \rightarrow y' = -1 < 0$

$t = \dfrac{11 - \sqrt{33}}{4} \rightarrow \dfrac{11-\sqrt{33}}{4} > \dfrac{11 - \sqrt{36}}{4} = \dfrac{5}{4} \qquad y' > 3 \cdot \left(\dfrac{5}{4}\right)^2 - 4 = \dfrac{11}{16} > 0$

$t = \dfrac{11 + \sqrt{33}}{4} \rightarrow \quad y' > 0$