0001130819688999

九州大学

2013年 理系 第1問

$\boxed{1}$ $a > 1$ とし，2つの曲線

$$y = \sqrt{x} \qquad (x \geqq 0),$$
$$y = \frac{a^3}{x} \qquad (x > 0)$$

を順に C_1, C_2 とする．また，C_1 と C_2 の交点 P における C_1 の接線を ℓ_1 とする．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C_1 と y 軸および直線 ℓ_1 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ．

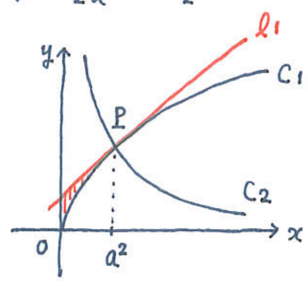
(2) 点 P における C_2 の接線と直線 ℓ_1 のなす角を $\theta(a)$ とする $\left(0 < \theta(a) < \frac{\pi}{2}\right)$. このとき，$\lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a)$ を求めよ．

(1) $\sqrt{x} = \dfrac{a^3}{x}$ の両辺を2乗して． $x = \dfrac{a^6}{x^2}$

$\therefore x^3 = a^6$ $\quad\therefore x = a^2$ 交点Pの座標は (a^2, a)

$y = \sqrt{x}$ のとき $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ より．ℓ_1: $y = \dfrac{1}{2a}(x - a^2) + a$ $\quad\therefore \ell_1 : y = \dfrac{1}{2a}x + \dfrac{a}{2}$

$\therefore$ 求める面積を $S(a)$ とすると．



$$S(a) = \int_0^{a^2} \frac{1}{2a}x + \frac{a}{2} - \sqrt{x}\,dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{4a} + \frac{a}{2}x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a^2}$$
$$= \underline{\frac{a^3}{12}} \;/\!/$$

(2) $y = \dfrac{a^3}{x}$ のとき． $y' = -\dfrac{a^3}{x^2}$ より．点Pにおける C_2 の接線 ℓ_2 は．

ℓ_2: $y = -\dfrac{1}{a}(x - a^2) + a$ $\quad\therefore \ell_2$: $y = -\dfrac{1}{a}x + 2a$

$$\therefore \tan\theta(a) = \frac{\frac{1}{2a} - \left(-\frac{1}{a}\right)}{1 + \frac{1}{2a}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)} = \frac{3a}{2a^2 - 1}$$

$\cos^2\theta(a) = \dfrac{1}{1 + \tan^2\theta(a)}$ より． $\cos^2\theta(a) = \dfrac{(2a^2-1)^2}{(2a^2-1)^2 + 9a^2}$ $\quad\therefore \sin^2\theta(a) = \dfrac{9a^2}{(2a^2-1)^2 + 9a^2}$

$0 < \theta(a) < \dfrac{\pi}{2}$ より． $\sin\theta(a) > 0$ なので， $\sin\theta(a) = \dfrac{3a}{\sqrt{4a^4 + 5a^2 + 1}}$

$$\therefore \lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a) = \lim_{a\to\infty} \frac{3}{\sqrt{4 + \frac{5}{a^2} + \frac{1}{a^4}}} = \underline{\frac{3}{2}} \;/\!/$$