岡山大学

2017年 理系 第4問

$\boxed{4}$ α は $0<|\alpha|<1$ を満たす虚数であるとする．複素数平面上の点の列 z_1，z_2，z_3，$\cdots$ を，$z_1=0$，$z_2=1$ および

$$\begin{cases} z_{2n+1}-z_{2n}=\alpha(z_{2n}-z_{2n-1}) & (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\ z_{2n+2}-z_{2n+1}=\overline{\alpha}(z_{2n+1}-z_{2n}) & (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

で定める．ただし，虚数とは虚部が0でない複素数のことであり，また，$\overline{\alpha}$ は α に共役な複素数を表すものとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$z_{2n+2}-z_{2n}=|\alpha|^2(z_{2n}-z_{2n-2}) \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

(2) 偶数番目の点の列 z_2，z_4，z_6，$\cdots$ および奇数番目の点の列 z_1，z_3，z_5，$\cdots$ は，それぞれ同一直線上にあることを示せ．

(3) $\lim_{n\to\infty}|z_n-w|=0$ を満たす複素数 w を求めよ．