東京海洋大学

2015年 海洋科学 第1問

数理 石井K

1 $a \geqq 0$ とするとき，3次関数 $f(x) = x^3 - 3ax + a$ について，次の問に答えよ．

(1) $a = 1$ のとき，$f(x)$ の極値を求め，$y = f(x)$ のグラフをかけ．

(2) $0 \leqq x \leqq 2$ において $f(x) \geqq 0$ となるような a の値の範囲を求めよ．

(1) $a=1$ のとき．$f(x) = x^3 - 3x + 1$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 3$

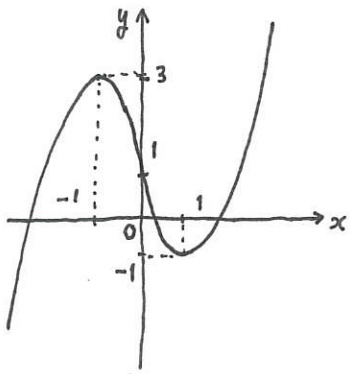
$= 3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

$\therefore$ 右の増減表より．

極大値は 3 ($x=-1$ のとき)，極小値は -1 ($x=1$ のとき)

また，グラフは右のようになる．



(2) $f'(x) = 3x^2 - 3a$

$= 3(x^2 - a)$

$a \geqq 0$ であるから．

$f'(x) = 0$ となるのは $\begin{cases} x = 0 & (a = 0 \text{ のとき}). \\ x = \pm\sqrt{a} & (a > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$

(i) $a = 0$ のとき．$f(x) = x^3$ となり．$0 \leqq x \leqq 2$ において $f(x) \geqq 0$ を満たしている．

(ii) $0 < a < 4$ のとき．

右の増減表より．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	↘	$a-2a\sqrt{a}$	↗	$8-5a$

$a - 2a\sqrt{a} \geqq 0$

$\therefore a(1 - 2\sqrt{a}) \geqq 0$　　$a > 0$ より　$1 - 2\sqrt{a} \geqq 0$

$\therefore$ これを解くと．$0 < a \leqq \frac{1}{4}$

(iii) $a \geqq 4$ のとき．

$0 \leqq x \leqq 2$ において．$f'(x) \leqq 0$ となり．$f(x)$：単調減少

$\therefore f(2) \geqq 0$ となればよい　$\therefore f(2) = 8 - 5a \geqq 0$　$\therefore a \leqq \frac{8}{5}$　これは $a \geqq 4$ に反して不適

(i)〜(iii) より．$0 \leqq a \leqq \frac{1}{4}$