2014年 第4問

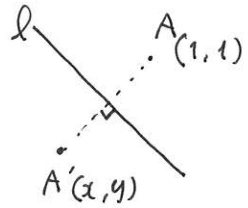
$\boxed{4}$ 座標平面において，点O(0, 0)，点A(1, 1)がある．方程式$y=-ax+2a+2$が表す直線をℓとするとき，次の問いに答えなさい．ただし，aは正の実数とする．

(1) 直線ℓに関して点Aと対称な点をA′とする．A′の座標を求めなさい．

(2) 点Pが直線ℓ上を動くときのOP＋PAの最小値を，aを用いて表しなさい．

(3) (2)で求めたOP＋PAの最小値を$f(a)$とするとき，$f(a)$を最大にするようなaの値を求めなさい．

(1) $A'(x, y)$とおくと．$AA' \perp \ell$より



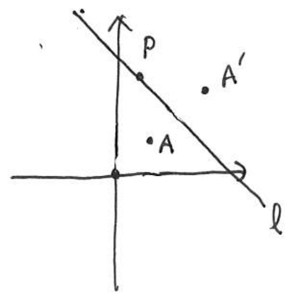
$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{1}{a} \qquad \therefore\ a(y-1) = x-1 \quad \cdots ①$$

A，A′の中点を求めると，$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right)$ この点はℓ上にあるから

$$\frac{y+1}{2} = -a \cdot \frac{x+1}{2} + 2a + 2$$

$$\therefore\ y+1 = -a(x+1) + 4a + 4 \quad \cdots ②$$

①，②より． $A'\left(\frac{3a^2+2a+1}{a^2+1}, \frac{a^2+2a+3}{a^2+1}\right)$ //



(2) OP＋PA＝OP＋PA′ なので

OP＋PAの最小値は 線分OA′の長さ．

$$\therefore \sqrt{\left(\frac{3a^2+2a+1}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{a^2+2a+3}{a^2+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{10a^2+16a+10}{a^2+1}} \ //$$

(3)
$$f(a) = \sqrt{10 + \frac{16}{a+\frac{1}{a}}} \leqq \sqrt{10 + \frac{16}{2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}}} = 3\sqrt{2}$$

相加-相乗

このとき 等号は $a = \frac{1}{a}$　$a>0$ より． $a=1$ のとき //