2012年第6問

数理 石井K

6 $x \neq 0$ のとき，$\left|\dfrac{x^2+7x+25}{x}\right|$ の最小値およびそれを与える x の値を求めよ．

$f(x) = \left|\dfrac{x^2+7x+25}{x}\right|$ $(x \neq 0)$ とおく

$x^2+7x+25 = \left(x+\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{51}{4} > 0$ であるから，

$f(x) = \dfrac{x^2+7x+25}{|x|}$

(i) $x > 0$ のとき.

$f(x) = \dfrac{x^2+7x+25}{x} = x + \dfrac{25}{x} + 7$

$x > 0$，$\frac{25}{x} > 0$ であるから．相加・相乗平均の関係より

$x + \frac{25}{x} \geqq 2\sqrt{x \cdot \frac{25}{x}} = 10$

$\therefore f(x) \geqq 17$ 等号成立は $x = \frac{25}{x}$ すなわち $x=5$ のとき

(ii) $x < 0$ のとき

$f(x) = \dfrac{x^2+7x+25}{-x} = -x - \dfrac{25}{x} - 7$

$t = -x\ (>0)$ とおくと，$f(x) = t + \frac{25}{t} - 7$

$t > 0$，$\frac{25}{t} > 0$ であるから．相加・相乗平均の関係より

$t + \frac{25}{t} \geqq 2\sqrt{t \cdot \frac{25}{t}} = 10$

$\therefore f(x) \geqq 3$ 等号成立は $t = \frac{25}{t} \Leftrightarrow t=5 \Leftrightarrow x=-5$

(i)，(ii) より 最小値は 3 ($x=-5$ のとき)