

2013年工学部第3問

数理  
石井K

3 関数  $y = -x^3 + x$  について以下の問いに答えよ。

- (1) 極値を求めグラフの概形を描け。  
 (2) グラフ上の点  $P(t, -t^3 + t)$  ( $t > 0$ ) における接線とグラフとの交点  $Q$  の座標を求めよ。  
 (3) (2) の接線が点  $(0, 2)$  を通るとき線分  $PQ$  の長さを求めよ。

← 応用問題としては  
P以外の あった方が"良い"

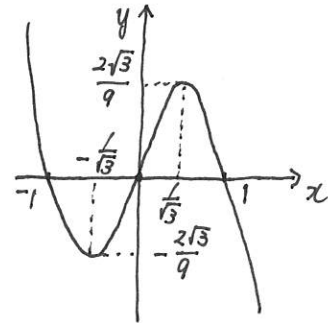
$$(1) y' = -3x^2 + 1$$

$$\therefore y' = 0 \text{ となるのは } x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} \text{極小値は } -\frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ (} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき)} \\ \text{極大値は } \frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ (} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき)} \end{cases}$$

$x$	...	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...
$y'$	-	0	+	0	-
$y$	↓	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↑	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↓

極小      極大



$$(2) y' = -3x^2 + 1 \text{ より}$$

$$\text{接線は } y = (-3t^2 + 1)(x - t) - t^3 + t$$

$$\therefore y = (-3t^2 + 1)x + 2t^3$$

$$\therefore \text{グラフとの交点を求める } -x^3 + x - (-3t^2 + 1)x - 2t^3 = 0$$

$$\therefore x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0$$

$$(x - t)^2(x + 2t) = 0 \quad \therefore \text{P以外の交点, Qの座標は}$$

$$\underline{Q(-2t, 8t^3 - 2t)}$$

$$(3) y = (-3t^2 + 1)x + 2t^3 \text{ が } (0, 2) \text{ を通るとき}$$

$$2 = 2t^3 \quad \therefore (t-1)(\underbrace{t^2 + t + 1}_{>0}) = 0 \quad \therefore t = 1.$$

$$\text{このとき } P(1, 0), Q(-2, 6) \text{ より}$$

$$PQ = \sqrt{(-2-1)^2 + 6^2} = \underline{3\sqrt{5}}$$