2012年 第3問

$\boxed{3}$ a を正の定数とし，次のように定められた2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える．

$$\begin{cases} a_1 = a, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{4}{a_n}\right) & (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\ b_n = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 2} & (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $-1 < b_1 < 1$ であることを示せ．

(2) b_{n+1} を a_n を用いて表せ．さらに，b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(3) b_3，b_4 をそれぞれ b_1 を用いて表せ．さらに，数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を n と b_1 を用いて表せ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n と b_1 を用いて表せ．

(5) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．