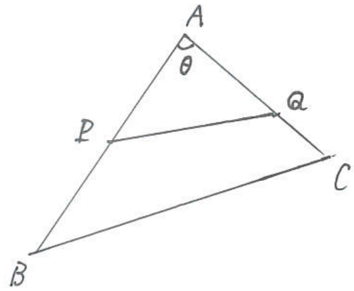
0000069720399999

倉敷芸術科学大学

2011年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $\angle A > 90°$ である $\triangle ABC$ の辺 AB，AC 上にそれぞれ頂点と異なる点 P，Q をとる．このとき，$PQ < BC$ であることを証明せよ．



$\angle A = \theta\ (>90°)$ とおく

また，$AB = c$，$AC = b$，

$AP = xc$，$AQ = yb$　$(0<x<1,\ 0<y<1)$ とおく．

余弦定理より，

$$BC^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\theta$$

$$PQ^2 = (xc)^2 + (yb)^2 - 2\,xc\cdot yb\cos\theta$$

$$\therefore BC^2 - PQ^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta - (x^2c^2) - (y^2b^2) + 2xybc\cos\theta$$

$$= \underbrace{b^2(1-y^2)}_{>0} + \underbrace{c^2(1-x^2)}_{>0} + 2bc\,\underbrace{\cos\theta}_{<0}\cdot\underbrace{(xy-1)}_{<0}$$

$\theta>90°$,

ここで，$0<x<1$，$0<y<1$ より

$1-y^2>0$，$1-x^2>0$，$\cos\theta<0$，$xy-1<0$，$b^2>0$，$c^2>0$

であるから

$BC^2 - PQ^2 > 0$

$\therefore BC > PQ$ ■