

2013年第2問

2 放物線 $C: y = x^2$ 上に2点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ がある。ただし, $a < b$ とする。放物線 C と線分 AB が囲む部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

- (1) $S = \frac{(b-a)^3}{6}$ であることを示せ。
- (2) 2点 A, B を固定する。放物線 C 上の点 $P(t, t^2)$ に対して、放物線 C と線分 AP が囲む部分の面積を S_1 、放物線 C と線分 BP が囲む部分の面積を S_2 とする。 $a < t < b$ のとき、 $S_1 + S_2$ の最小値を求めよ。
- (3) 常に $S = \frac{9}{2}$ であるように、2点 A, B が放物線 C 上を動く。このとき、線分 AB の中点の軌跡の方程式を求めよ。