2014年 第4問

$\boxed{4}$ 次の問に答えよ．

(1) a，$b>0$とする．このとき

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

であることを証明せよ．また，等号が成立するのは$a=b$の場合だけであることを示せ．

(2) a，b，$c>0$とする．このとき

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$$

であることを証明せよ．また，等号が成立するのはどのような場合か述べよ．

(3) α，β，γを三角形の3辺の長さとする．このとき

$$\alpha\beta\gamma \geqq (-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$$

であることを証明せよ．また，等号が成立するのは正三角形の場合だけであることを示せ．

(4) α，β，γを三角形の3辺の長さとする．このとき

$$\frac{\alpha}{-\alpha+\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha-\beta+\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma} \geqq 3$$

であることを証明せよ．また，等号が成立するのは正三角形の場合だけであることを示せ．