2015年 第4問　　1枚目／2枚

数理 石井K

4 関数 $f(x)=x^3-3x^2+x$ を考える．曲線 $y=f(x)$ を C とする．以下の問に答えよ．

(1) $y=f(x)$ の増減を調べて極値を求めよ．またグラフを描け．

(2) a を実数とする．直線 $y=ax$ と C の共有点が異なる 2 点のみであるときの a の値をすべて求めよ．また，求めたそれぞれの a の値に対して，共有点の x 座標を求めよ．

(3) C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線を ℓ とする．ℓ と C の共有点が P のみであるとき，t が満たす条件を求めよ．

(1) $f'(x)=3x^2-6x+1$

$\therefore$ $f'(x)=0$ となるのは，$x=\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}$

x	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

極大　極小

右の割り算より，

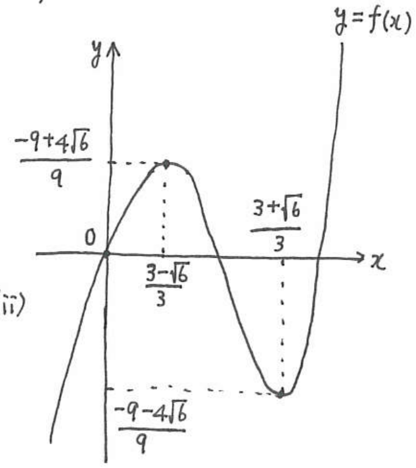
$$f(x)=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)(3x^2-6x+1)-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}x-\frac{1}{3} \\ 3x^2-6x+1\,\overline{)\,x^3-3x^2+x} \\ \underline{x^3-2x^2+\frac{1}{3}x} \\ -x^2+\frac{2}{3}x \\ \underline{-x^2+2x-\frac{1}{3}} \\ -\frac{4}{3}x+\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\therefore\ f\left(\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}\right)=-\frac{4}{3}\cdot\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}+\frac{1}{3}=\frac{-9\mp4\sqrt{6}}{9}$$

$\therefore$ 極大値は $f\left(\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)=\dfrac{-9+4\sqrt{6}}{9}$，極小値は $f\left(\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)=\dfrac{-9-4\sqrt{6}}{9}$ //

グラフは右のようになる



(2) $f(x)-ax=0$ がちょうど2個の実数解をもつ

$\therefore$ $x(x^2-3x+1-a)=0$ より，$x=0$ は1つの解である．

$\therefore$ $x^2-3x+1-a=0$ が 0 と 0 以外の実数解をもつ $\cdots$(i)

または，0 以外の重解をもつ．$\cdots$(ii)

(i) のとき，$1-a=0$ より，$a=1$ これは条件をみたす．

(ii) のとき，判別式を D とおくと，$D=9-4(1-a)=0$

$\therefore$ $a=-\dfrac{5}{4}$ これは条件をみたす．

$\therefore$ $a=1,\ -\dfrac{5}{4}$ //

$a=1$ のとき，共有点の x 座標は $x=0,3$，$a=-\dfrac{5}{4}$ のとき $x=0,\ \dfrac{3}{2}$ //

岐阜大学

2015 年 第 4 問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ を考える．曲線 $y = f(x)$ を C とする．以下の問に答えよ．

(1) $y = f(x)$ の増減を調べて極値を求めよ．またグラフを描け．

(2) a を実数とする．直線 $y = ax$ と C の共有点が異なる 2 点のみであるときの a の値をすべて求めよ．また，求めたそれぞれの a の値に対して，共有点の x 座標を求めよ．

(3) C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線を ℓ とする．ℓ と C の共有点が P のみであるとき，t が満たす条件を求めよ．

(3) $\mathrm{P}(t,\ t^3-3t^2+t)$ における接線の傾きは $f'(t) = 3t^2-6t+1$

$\therefore\ \ell : y = (3t^2-6t+1)(x-t) + t^3-3t^2+t$

$\therefore\ \ell : y = (3t^2-6t+1)x - 2t^3+3t^2$

$x^3-3x^2+x-\{(3t^2-6t+1)x-2t^3+3t^2\} = 0$

$\Leftrightarrow\ x^3-3x^2-(3t^2-6t)x+2t^3-3t^2 = 0$

$\Leftrightarrow\ (x-t)^2\{x-(3-2t)\} = 0$

$\Leftrightarrow\ x = t,\ 3-2t$

$\therefore$ この解が同じになるときなので（共有点がPのみなので，解は1つ）

$t = 3-2t \quad \therefore\ \underline{t=1}$ //